

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：32657

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800014

研究課題名(和文) ガロワ表現の非可換変形に対する岩澤理論的現象の多角的研究

研究課題名(英文) Study on Iwasawa theoretic phenomena appearing in non-commutative Galois deformations

研究代表者

原 隆 (HARA, Takashi)

東京電機大学・未来科学部・助教

研究者番号：40722608

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 虚数乗法を持つ概通常ヒルベルト尖点形式の岩澤主予想(落合理氏との共同研究)、(2) CM体の非可換岩澤理論、を中心に研究を実施した。(1)については、CM体の多変数非可換岩澤主予想を特殊化して虚数乗法を持つ概通常ヒルベルト尖点形式の円文岩澤主予想を導出する手法を確立し、論文の投稿・受理に至った。この結果を概通常肥田族に拡張すべく、研究を継続中である。(2)に関しては、簡単な場合にCM体の多変数 p 進ゼータ関数の貼り合わせの条件を書き下すことに成功した。今後はより一般のCM体の拡大への拡張を検証するとともに、論文の完成を急ぎたい。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied mainly (1) Iwasawa main conjecture for nearly ordinary Hilbert cusp forms with complex multiplication (joint with Tadashi Ochiai), (2) Noncommutative Iwasawa theory for CM number fields. For (1), we established a reduction technique to deduce the cyclotomic Iwasawa main conjecture for Hilbert cuspforms with complex multiplication from the multivariable main conjecture for CM fields (the paper is now accepted and published). We are now planning to extend our result to the main conjecture of nearly ordinary Hilbert Hida families. For (2), we succeeded to describe conditions to patch the multivariable p -adic L-functions for CM number fields in several easy cases. We are now trying to extend our result to rather general extensions of CM fields, and we hope to complete the first draft of the paper soon.

研究分野：整数論・数論幾何学

キーワード：非可換岩澤理論 岩澤主予想 p 進L関数 セルマー群 CM体 虚数乗法 肥田変形 ガロワ変形

1. 研究開始当初の背景

John H. Coates 等によって 2000 年代に提唱された非可換岩澤理論は、David Burns, 加藤和也等による啓蒙的な仕事の影響を受けながら目覚ましい発展を遂げ、2010 年代初頭には Jürgen Ritter, Alfred Weiss, Mahesh Kakde 等によって総実代数体の非可換岩澤主予想が (μ 不変量が 0 であるという仮定の下で) 解決されるまでに至った。総実代数体非可換岩澤主予想の解決後も、非可換岩澤理論の様々な方向からの研究がなされてきたが、古典的な (可換拡大に対する) 岩澤理論と比較するとまだまだ未解明なことが多く、研究の手法もあまり確立されていない状態であった。非可換ガロワ拡大をそのまま直接扱えるような岩澤理論の枠組みを構築することが整数論にもたらす恩恵は計り知れず、そのためにも非可換岩澤理論のより詳細かつ緻密な研究と多彩な研究手法の開発が要請されていた。

2. 研究の目的

非可換岩澤理論を「非可換ガロワ変形の岩澤理論」と位置づけ、ガロワ変形的な視点で非可換岩澤理論を再解釈し、その内容を明らかにすることを目的としている。従来の非可換岩澤理論の研究では、非可換岩澤理論を (モチーフ乃至 p 進ガロワ表現の) 円分変形に対する岩澤理論の《貼り合せ》として解釈する立場が主流であった (Coates による《明石》の哲学)。このような視点が (主に火可換環論的な問題に起因する) 非可換岩澤理論の諸問題を解決に導き、研究を劇的に押し進める原動力となったことは疑うべくもない。しかし一方で、現在では岩澤理論の抽象化・一般化が促進され、岩澤理論で扱われる対象が一般のガロワ変形にまで拡張されていることを鑑みれば、「円分変形の岩澤理論に帰着して非可換岩澤理論を考察する」という観点だけでは矢張り不十分であると断じざるを得ず、この視点に執着しすぎることで却って多くの情報が見過ごされてしまう危険性も否定できない。そこで、非可換岩澤理論にもガロワ変形の岩澤理論に基づく普遍的な視点を導入することで、非可換岩澤理論の思想的背景をより自然に解釈できるようにし、その上で非可換岩澤理論ならではの深い数論的性質を導き出すことを目標として研究を実施した。

3. 研究の方法

総実代数体のテイトモチーフに対する非可換岩澤理論は Ritter, Weiss, Kakde 等による研究を経てかなり成熟したものとなったため、次の段階として CM 体の非可換岩澤

主予想に焦点を絞って研究を進めた。これは、単に CM 体が岩澤理論に於いて総実代数体の次に扱いやすい体であるからというのみならず、CM 体のテイトモチーフが総実代数体の場合とは大きく異なって「 (A_0) 型量指標の重さに対応する) 多変数のパラメータを持つ変形」を有し、変形理論の観点からも大変興味深い対象となっているからである。また、CM 体の多変数岩澤主予想は (A_0) 型量指標のテータ持ち上げおよびガロワ表現の誘導表現を通じて) 虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式の岩澤主予想とも密接に関係することが明らかになっているため、虚数乗法を持つヒルベルト保型形式を介してより一般的な (円分変形のアルティン表現での捻りとは異なる) 非可換ガロワ変形を考察することも目論んで研究を遂行した。

4. 研究成果

先ずは「異なるモチーフの岩澤理論間の関係」を記述する成果として、CM 体の多変数岩澤主予想の「円分方向への特殊化」によって、虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式の円分岩澤主予想が (若干の技術的仮定の下で) 導かれることを証明した (落合理との共同研究)。この研究成果は、虚数乗法を持つ楕円尖点形式のときに Karl Rubin や加藤和也が展開していた議論を拡張したものである。しかしヒルベルト尖点形式の場合には、特に岩澤主予想の代数側の登場人物である特性イデアルという不変量が一般には特殊化操作に対して全く整合的に振舞わないという現象 (この現象自体は古典的に観察されていた) を、変数の数が非常に多い岩澤代数を係数とする岩澤加群に対して慎重に取り扱う必要があり、その可換環論的困難を膨大かつ精密な議論により克服することで当該研究成果を得た。本研究成果は、虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式の概通常変形族の岩澤主予想へ拡張されることが期待されるが、その拡張についても粗方目処がついた状態になっており、現在細部の証明を詰めている段階である。

他方で非可換岩澤主理論の研究の側面では、CM 体の非可換岩澤主予想について、従来の研究の設定と異なる設定で研究を開始した。より詳しくは、これまでの先行研究では「CM 体の (多変数) p 進 L 関数を円分方向に特殊化したものを《貼り合わせる》」方針で非可換 p 進ゼータ関数の構成を目指すものが殆どであったが、そうではなく多変数 p 進 L 関数を「多変数のまま《貼り合わせる》」方針で CM 体の非可換岩澤理論を考察することを目指し、その設定から考察し直した。この設定での非可換岩澤理論に於いて、非常に単純なケースに対しては p 進 L 関数の《貼り合せ》の条件を書き下すことに成功している。今後はより一般の拡大に対してこの条件を拡張

し、Athanasios Bouganis, Dohyeong Kim らの先行研究も踏まえて p 進 L 関数の非可換合同式をより精密なものとする事で、主予想を解決することを当面の目標として研究を続けてゆくつもりである。

また、従来とは異なる観点からの非可換岩澤理論の研究として、セルマー群のポントリヤーギン双対の高次 Fitting 不変量 (近年 Burns-佐野により導入されている) を L 関数の特殊値と関連する不変量で記述することを目指す研究に着手した (大下達也との共同研究)。当初は栗原将人によるガウス和型オイラー系の議論を非可換岩澤理論に拡張する形で研究を進めていたが、Burns-佐野の非可換ゼータ元を用いたアプローチにも着手している。ただ、いずれに於いても高次 Fitting 不変量の定義と関係した非可換環論的な問題が大きな障害となっており、残念ながら本研究期間内に核心的な結果を得るまでには至らなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Takashi Hara and Tadashi Ochiai, *The cyclotomic Iwasawa main conjecture for Hilbert cusp forms with complex multiplication*, *Kyoto J. Math.*, **58**, No.1, March 2018, p.p. 1-100. [査読あり]

原 隆, **Ritter-Weiss の同変岩澤理論について**, 第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』報告集, 第 巻, 2015 年 3 月, p.p. 677-826. [査読なし]

原 隆, **非可換岩澤主予想の証明の方針: Burns-加藤の手法**, 第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』報告集, 第 巻, 2015 年 3 月, p.p. 193-339. [査読なし]

Takashi Hara, *Concerning actions of 3-manifold groups: from topological and arithmetic viewpoints*, 数理解析研究所考究録 (RIMS Kōkyūroku), **1911**, 2014 年 8 月, p.p. 57-75. [査読なし]

[学会発表](計 10 件)

原 隆, **CM 体の非可換岩澤理論について**, 九州代数的整数論 2018 (KANT2018), 2018 年 3 月 8 日 (九州大学).

並川 健一, 原 隆, **Modular symbol の方**

法による $GL(2n)$, $GL(n) \times GL(n-1)$ の p 進 L 関数の構成の現状, RIMS 合宿型セミナー『保型 L 関数の特殊値と付随する p 進 L 関数』, 2016 年 9 月 22 日 (京都府美山町自然文化村 河鹿荘).

原 隆, **セルマー群の概可除性と特性イデアルの特殊化について**, 特異点論月曜セミナー, 2016 年 7 月 25 日 (日本大学文理学部).

Takashi Hara, *On the Iwasawa main conjecture for Hilbert modular cuspforms with complex multiplication*, 2016 Korea-Japan Joint Number Theory Seminar, 2016 年 2 月 1 日 (浦項工科大学, 韓国).

原 隆, **岩澤加群の兼零部分加群の自明性と岩澤主予想の特殊化について**, 愛知数論セミナー, 2015 年 6 月 6 日 (愛知工業大学).

原 隆, **兼零部分加群の自明性と特性イデアルの特殊化について**, 愛媛大学代数セミナー, 2015 年 1 月 16 日 (愛媛大学).

原 隆, **Ritter-Weiss の同変岩澤理論について**, 第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』, 2014 年 9 月 1 日 (香川県小豆島ふるさと村).

原 隆, **非可換岩澤主予想の証明の方針: Burns-加藤の手法**, 第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』, 2014 年 8 月 29 日 (香川県小豆島ふるさと村).

原 隆, **ブリュアー-ティッツ理論を用いたカラー-シャーレン理論の拡張について**, 香川セミナー, 2014 年 7 月 12 日 (香川大学).

Takashi Hara, *Concerning actions of 3-manifold groups: from topological and arithmetic viewpoints*, RIMS 研究集会 *Intelligence of Low dimensional topology*, 2014 年 5 月 22 日 (京都大学数理解析研究所).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:

番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

原隆（整数論）のホームページ
<https://www.cck.dendai.ac.jp/math/~t-hara/index.html>

6．研究組織 (1)研究代表者

原 隆（HARA, Takashi）
東京電機大学・未来科学部・助教
研究者番号：40722608