

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 9 日現在

機関番号：34304

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800015

研究課題名(和文)代数的及び組合せ論的手法を駆使した正規整凸多面体の列の探究

研究課題名(英文) Study of delta-vectors of normal integral convex polytopes by means of algebraic and combinatorial methods

研究代表者

東谷 章弘 (HIGASHITANI, Akihiro)

京都産業大学・理学部・助教

研究者番号：60723385

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目的は、整凸多面体の正規性と列の解析である。代数的、および、組合せ論的な側面から整凸多面体の正規性と列の関係を明らかにすることに焦点を絞った。具体的には、膨らませた整凸多面体の列がいつunimodalになるか？という問いに対して明確な解答を与えた。また、ミンコフスキー和やfree sumなど、列の振る舞いと相性の良い組合せ論的操作に対して、整凸多面体の正規性の変化を詳細に観察した。研究期間の3年間で、4本の学術論文、6回の学会発表、2冊の図書の執筆などを含めた様々な研究成果をあげることが出来た。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research project is the study of delta-vectors and normality of integral convex polytopes. The focus of this research is to study some relationships between delta-vectors and normality of integral convex polytopes from combinatorial and algebraic points of view. Concretely, for the question of which delta-vectors of dilated integral convex polytopes can be unimodal, a precise answer has been provided. Moreover, on the operations on integral convex polytopes, called Minkowski sums and free sums which work well for delta-vectors, the detailed studies of normality of Minkowski sums or free sums of integral convex polytopes have been developed. As the results of this project for three years, three research articles and two books have been written and six research talks have been given.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：整凸多面体 正規 列 反射的凸多面体

1. 研究開始当初の背景

整凸多面体とは、頂点の座標がすべて整数であるような凸多面体のことを指し、様々な分野に登場する重要な数学的研究対象である。本研究の研究開始当初、整凸多面体の「正規性」が非常に注目されていた。例えば、有限単純グラフに付随するある整凸多面体の正規性から「四色定理」の別証明が導かれる、ということが判明したのが2010年前後の話である。そのような学術的背景も踏まえ、正規整凸多面体に関する詳細な研究に着手することにした。

一方で、整凸多面体に関する重要な不変量の1つである「 f 列」は、整凸多面体に含まれる格子点の個数を反映した数え上げ関数に関連する非負整数列であり、数え上げ組合せ論において盛んに研究されている組合せ論的对象である。さらに、整凸多面体の列は「Ehrhart環」と呼ばれるCohen-Macaulay次数付き環の h 列とも解釈できるので、可換環論(特に、トーリック環論)や代数幾何学(特に、トーリック幾何)においても重要な不変量である。

そこで、整凸多面体の正規性の研究に対する新たなアプローチとして、正規整凸多面体の列を研究することにした。四色定理をも導く整凸多面体の正規性が整凸多面体にとっても“良い”性質であることは間違いなく、

列についても何か“良い”性質(例えば unimodal 性など)が導かれることも大いに期待される。組合せ論的にも代数的にも重要な不変量である列の観点から、整凸多面体の正規性を観察する、というのが本研究を開始した当初の学術的背景である。

2. 研究の目的

上記の通り、本研究の目的は、整凸多面体の正規性に関する研究の新たなアプローチとして、正規整凸多面体の列を探究することにある。本研究における具体的な研究課題として、正規整凸多面体の列に関する以下の2つの研究課題(1)(2)に取り組む。

(1) 正規反射的凸多面体の列の unimodal 性の証明

(2) 正規整単体の列の特徴付け

研究課題(1)に関して、反射的凸多面体とは、トーリック多様体における「ミラー対称性」の理論において本質的な役割を担う整凸多面体の一種であり、近年盛んに研究されている極めて重要な整凸多面体の1つである。さらに、整凸多面体が反射的凸多面体であることと整凸多面体の列が対称であることは同値であることがよく知られており、

列との相性も良い。そこで、整凸多面体の正規性との関連に焦点を当てて反射的凸多

面体とその列の研究を行うことは自然であり、興味深い結果が得られることが期待される。また、知られている反射的凸多面体の例から、反射的凸多面体が正規であるならばその列が unimodal になる、ということは以前から予想されていた。本研究課題はその予想の解決に挑戦することを1つの目的としている。

研究課題(2)に関して、任意の整凸多面体は整単体に三角形分割することが可能であり、その三角形分割とそこに現れる各整単体の列から元の整凸多面体の列が計算できるため、整単体は全ての整凸多面体の“素”と言える対象である。一方で、整凸多面体の列の特徴付けは、整凸多面体の数え上げ組合せ論における重要な問題意識の一つであり、代数的にも、Cohen-Macaulay 次数付き環の h 列の特徴付けは古くから研究されてきた重要な課題である。本研究は整凸多面体の正規性と列の関係を詳細にすることを目的としており、正規整単体に注目して列の特徴付けの試みは様々な観点からも自然な着想である。

3. 研究の方法

上記の2つの研究課題(1)および(2)に対し、研究方法はいずれも共通して、具体例の徹底的な計算から一般的な状況を予想して課題の解決を試みる、という手法で研究を進める。

1つ目の研究課題(1)では、低い次元の正規反射的凸多面体の具体例を多く構成し、それらの列を計算し、列の unimodal 性を確認する。5次元以下の反射的凸多面体の

列は一般に、正規性に拘わらず常に unimodal になることが知られているので、6次元以上の例を多く構成する必要がある。有限グラフや有限半順序集合に付随する正規反射的凸多面体を中心に考察を進め、列を考察する。一般次元の場合の証明の際には、類似の定理である「 g 定理」を参考にする。 g 定理は単体的凸多面体の h 列が unimodal であることを主張しているが、反射的凸多面体が正則 unimodular 三角形分割を持つならば列が unimodal になることも、 g 定理をうまく適用することで証明できる。正則 unimodular 三角形分割の存在から整凸多面体の正規性が導かれるので、 g 定理の再考は本研究においても極めて有効であると思われる。 g 定理の証明にはトーリック幾何や可換代数などの代数的な道具が使われており、研究課題(1)の証明においても様々な代数的アプローチが有効であると思われるので、必要に応じて様々な角度から証明を試みる。

2つ目の研究課題(2)に対しても、低い次元の例を基礎とし、一般次元の場合の証明に取り掛かる。一般に整単体は、Hermite normal form と呼ばれる下三角整数行列と対

応することが知られている。Hermite normal form を用いて整単体の列を考察することが有益であると思われるので、まずは整単体の正規性を Hermite normal form の言葉で記述したい。また、低い次元で多くの正規整単体を構成し、列を計算することで、列の特徴付けを行うための材料収集に努める。一方で、整単体にはある種の有限アーベル群が付随し、整単体の列もその有限アーベル群を用いて計算でき、さらに、ある特別な場合には有限アーベル群を線形符号と見なすこともできる。有限アーベル群の加法的整数論や符号理論の観点からも正規整単体の列の研究を進める。加えて、2つ以上の整凸多面体に対してミンコフスキー和や free sum を取る操作は、列の計算と非常に相性が良い。例えば、2つの整凸多面体の free sum の多項式(列を係数に持つ多項式)は元の多項式2つの積になる。正規整単体の列の研究の一環として、正規整単体のミンコフスキー和や free sum と列との関連も考察し、詳細な研究を行う。

4. 研究成果

整凸多面体の正規性と列の関連について、代数的及び組合せ論的側面からの研究を展開した。主な具体的な研究成果として、4本の学術論文を執筆した。1本目の論文[雑誌論文]では、 n 倍に膨らませた整凸多面体の列が unimodal になるような正の整数 n の最良の下限を整凸多面体の不変量を用いて与えた。当該論文では、“unimodal 性”よりさらに強い性質である“log-concave 性”や“alternating increasingly 性”についても注目し、詳細な研究を展開した。2本目の論文[雑誌論文]では、正規整凸多面体の代数的側面の研究として、“almost Gorenstein”と呼ばれる可換環論的性質に注目し、almost Gorenstein 次数付き環の h 列について研究した。整凸多面体の列は、Ehrhart 環と呼ばれる Cohen-Macaulay 次数付き環の h 列に一致するので、[雑誌論文]は本研究課題における代数的側面からの研究結果であると言える。3本目の論文[雑誌論文]では、整凸多面体のミンコフスキー和に注目し、整凸多面体のミンコフスキー和がいつ正規になるか?という問いに対して、ある種の解答を与えた。4本目の論文[雑誌論文]でも、整凸多面体の free sum に注目し、整凸多面体の free sum がいつ正規になるか?という問いに対する解答を与えた。ミンコフスキー和や free sum は整凸多面体の列の性質を反映しており、列との相性も良い。[雑誌論文、]は正規整凸多面体の列の組合せ論的側面からの研究成果であると言える。[雑誌論文]は現在国際雑誌に投稿中であり、残りの論文[雑誌論文、]は国際

雑誌に既に掲載、もしくは、印刷中である。またこれらの研究成果は国内外の研究学会等において口頭発表を行った[学会発表 ~]。他にも、本研究課題に関連する研究活動の一環として、2冊の図書の執筆も行った[図書、]。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4件)

Takayuki Hibi and Akihiro Higashitani, Integer decomposition property of free sums of convex polytopes, (査読有り) *Annals of Combinatorics*, **20** (2016), 601-607.

Akihiro Higashitani, Minkowski sum of polytopes and its normality, (査読有り) *Journal of Mathematical Society of Japan*, **68** (2016), 1147-1159.

Akihiro Higashitani, Almost Gorenstein homogeneous rings and their h -vectors, (査読有り) *Journal of Algebra*, **456** (2016), 190-206.

Akihiro Higashitani, Unimodality of h -vectors of lattice polytopes and two related properties, (査読無し) arXiv:1411.5250v2 (2014).

[学会発表](計 6件)

東谷章弘、「格子凸多面体論のこれまでとこれから」日本数学会年会(招待講演)、2017年3月24日~3月27日、首都大学東京(東京都・八王子市)

Akihiro Higashitani, “Lattice simplices of maximal dimension with a given degree”, Einstein Workshop on Lattice Polytopes(招待講演・国際学会)、2016年12月12日~12月15日、Freie Universität Berlin(ドイツ・ベルリン)

東谷章弘、「Almost Gorenstein 標準的次數付き環とその h 列」日本数学会年会、2016年3月16日~3月20日、筑波大学(茨城県・つくば市)

東谷章弘、「Ehrhart 多項式と Ehrhart 環」第60回代数学シンポジウム(招待講演)、2015年8月31日~9月3日、静岡大学(静岡県・静岡市)

東谷章弘、「列の unimodal 性と関連する二つの性質」日本数学会年会、2015年3月21日~3月24日、明治大学(東京都・千代田区)

東谷章弘、「Squarefree イニシャルイデアルを持つ $(0,1)$ 凸多面体のファセット」日本数学会秋季分科会、2014年9月25日~9月28日、広島大学(広島県・東広島市)

[図書](計 2件)

東谷章弘 他、共立出版、「グレブナー教室 -計算代数統計への招待-」, 2015、224 ページ (177—190 を担当)。

東谷章弘 他、丸善出版、「鏡映の数学 -有限鏡映群の幾何学-」, 2015、222 ページ (97—139 を担当)。

〔その他〕

ホームページ等

http://www.cc.kyoto-su.ac.jp/~ahigashi/HP_eng

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

東谷 章弘 (HIGASHITANI, Akihiro)

京都産業大学・理学部・助教

研究者番号：60723385