

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800016

研究課題名(和文) 簡約代数群上の保型形式のp進的側面とその応用の研究

研究課題名(英文) On p-adic aspects of automorphic forms and their applications

研究代表者

河村 尚明 (Kawamura, Hisa-aki)

広島大学・理学研究科・助教

研究者番号：00533746

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：簡約代数群に対して様々な形で定義される保型形式に付随する保型L-関数が持つ数論的性質について、古典的(複素解析的)保型形式論とp進解析的保型形式論の双方に基づく多角的視点から研究を行った。例えば、Siegel Eisenstein級数およびDuke-Imamoglu-池田リフトと呼ばれる分裂斜交群、あるいは、準分裂ユニタリ群に対して定義される保型形式に対して、p進解析族およびp進保型形式を構成し、それらを通して、標準的L-関数が持つp進的性質について研究を行った。

研究成果の概要(英文)：For certain automorphic forms on reductive algebraic groups and associated L-functions, in particular, the so-called Siegel Eisenstein series, Duke-Imamoglu-Ikeda lift and standard L-functions for the symplectic and unitary groups, the p-adic aspects of them have been studied from various viewpoints arising out of the theories of classical and p-adic automorphic forms. More precisely, by constructing p-adic analytic families of the above-mentioned automorphic forms and the Lambda-adic forms, we study the p-adic standard L-functions for the symplectic and unitary groups.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 p進保型形式 L関数 p進L関数

1. 研究開始当初の背景

簡約代数群に対して定義される**保型形式** (automorphic forms) が、付随する保型 L-関数や保型 Galois 表現等の概念を介して、整数論や数論幾何学における様々な問題を考える上で重要な役割を担うものであるということは、有理数体上の 2 次一般線型群の場合における保型形式と楕円曲線の間の Eichler-志村同型を介して実際に得られた数々の応用例等によっても広く知られており、更に一般の簡約代数群に対する保型形式の場合についても、所謂 Langlands 予想の枠組みにおいて、その重要性が示唆されている。従って、高次の簡約代数群に対して、様々な保型形式に付随する保型 L-関数や保型 Galois 表現が持つ数論的性質を明示的な形で明らかにすることは、将来的な応用の可能性を高める意味でも極めて重要な課題であるといえる。その中でも、高次の簡約代数群に対して定義される保型形式や保型 L-関数が持つ p 進的性質に関する研究は、例えば、岩澤-Greenberg 主予想や Gross-Stark 予想、Bloch-加藤予想等への寄与を目的として、近年活発に行われているものである (cf. [1], [2], [3], [4])。

参考文献

- [1] C. Skinner and E. Urban, *The Iwasawa main conjectures for GL_2* , *Inventiones Mathematicae*, Vol.195 (2014), No.1, pp.1-277.
- [2] S. Dasgupta, H. Darmon and R. Pollack, *Hilbert modular forms and the Gross-Stark conjecture*, *Annals of Mathematics. Second Series*, Vol.174 (2011), No.1, pp.439-484.
- [3] J. Brown, *Saito-Kurokawa lifts and applications to the Bloch-Kato conjecture*, *Compositio Mathematica*, Vol.143 (2007), No.2, pp.290-322.
- [4] C. Skinner and E. Urban, *Sur les déformations p-adiques de certaines représentations automorphes*, *Journal of*

the Institute of Mathematics of Jussieu, Vol.5 (2006), No.4, pp.629-698.

2. 研究の目的

本研究は、2 次一般線型群の場合からの自然な一般化として、**分裂斜交群** (split symplectic group), **準分裂ユニタリ群** (quasi-split unitary group) と呼ばれる高次の簡約代数群に対して定義される保型形式が持つ数論的性質について、古典的 (複素解析的) な保型形式論と p 進解析的な保型形式論の双方に基づく多角的視点から、明示的な記述を与えることを目的として実施されたものである。

例えば、上述の 2 つの簡約代数群に対して、古典的保型形式論に基づいて一般的に定義される、**Siegel Eisenstein 級数** と呼ばれる非尖点的保型形式や **Duke-Imamoglu-池田リフト** と呼ばれる 2 次一般線型群からの Langlands 関手の持ち上げによって得られる尖点的保型形式 (cf. [5], [6]) に対し、それらを p 進解析的に補完する概念である **p 進解析族** (p-adic analytic family) や **p 進形式** (p-adic form) と呼ばれるものを介して、付随する標準的保型 L-関数の特殊値および保型 Galois 表現の性質について調べることで、古典的保型形式論と p 進解析的保型形式論の双方において幾つかの新しい結果が導出されると考えられる。また、このような特殊な保型形式に関する結果を基に、より一般の保型形式に付随する保型 L-関数や保型 Galois 表現が持つ性質を明らかにすることや、整数論や数論幾何学における諸問題を解決するための鍵となるべき知見を得ることが、本研究の主たる目的である。

参考文献

- [5] T. Ikeda, *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$* , *Annals of Mathematics. Second Series*, Vol.154 (2001), No.3, pp.641-681.
- [6] T. Ikeda, *On the lifting of Hermitian modular forms*, *Compositio Mathematica*, Vol.144 (2008), No.5, pp.1107-1154.

3. 研究の方法

まずは、分裂斜交群の場合において、Siegel Eisenstein 級数と呼ばれる非尖点的保型形式および Duke-Imamoglu-池田リフトと呼ばれる尖点的保型形式に対して、それらを p 進解析的に補完する p 進解析族、 p 進形式を具体的に構成し、N. Katz 氏や肥田晴三氏等によって確立された手法を用いて、それらに対応する p 進測度を構成する。これにより、上述のような保型形式に対する p 進 (保型) L -函数の雛形となるべき p 進解析関数の一般形が得られることとなり、これを更に特殊化することで、保型 L -函数の特殊値について明示的考察を与える。また、虚 2 次体上に定義された準分裂ユニタリ群の場合にも、分裂斜交群の場合と同様に、Siegel Eisenstein 級数や池田リフトと呼ばれる保型形式を補完するような p 進解析族、 p 進保型形式から定まる p 進測度を特殊化することによって、保型 L -函数の特殊値について調べることが可能である。

4. 研究成果

2 次一般線型群の場合に A. Wiles 氏や肥田晴三氏等によって定式化されていた p 進 Eisenstein 級数や尖点的 p 進形式からの自然な一般化として、有理数体上に定義された分裂斜交群および虚 2 次体上に定義された準分裂ユニタリ群の場合に **p 進 Siegel Eisenstein 級数**、 **p 進 Duke-Imamoglu-池田リフト**と呼ぶべき p 進形式を具体的に構成することができた。より具体的には、古典的保型形式論に基づいて一般的に定義される上述のような保型形式および適当な素数 p に対して、 **p -安定化** (p -stabilization) と呼ばれる p 進的な正規化を施し、それらの Fourier 展開を実際に p 進解析的に補完するような高次の p 進解析族や p 進形式を久保田-Leopoldt の p 進 L -函数や岩澤函数等の既存の p 進解析関数を用いて具体的に構成した (cf. [7],[8])。尚、これらの研究結果は、4 次分裂斜交群の場合に C. Skinner 氏と E. Urban 氏による 2 次元の保型 Galois 表現に付随する Selmer 群の研究 (cf. [4]) において得られていた結果の一般化と呼ぶべきものであり、将来的に、より高次の Selmer 群の研究に応用されるべきものである。また、これは後述の通り、池田保氏によって定式化されていた Duke-Imamoglu-池田リフトの構成法 (cf. [5]) の拡張を可能とするものでもある。

尚、虚 2 次体上に定義された符号 $(2,2)$ の準分裂ユニタリ群の場合に本研究によって得られた尖点的保型形式の p 進解析族と本質的に同質の p 進解析族が T. Berger 氏と K. Klosin 氏の共同研究によって若干異なる議論を用いて構成されている (cf. [9])。

また、上述の p 進 Siegel Eisenstein 級数から自然に定まる p 進測度 (所謂、 **p 進 Siegel Eisenstein 測度**) を特殊化することによって、近年、Z. Liu 氏や E. Eischen 氏、M. Harris 氏、J. Li 氏、C. Skinner 氏等の先行研究 (cf. [10],[11]) においても得られていた標準的 p 進 L -函数が、より具体的な形で (再) 構成可能であることが確かめられた。実際、上述の先行研究と同様に、古典的保型形式論における標準的保型 L -函数の**引き戻し公式** (pull-back formula) の **p 進類似**として、 p 進 Siegel Eisenstein 測度から、古典的保型形式に付随する標準的 L -函数の特殊値を p 進解析的に補完するような p 進 L -函数 (すなわち、標準的 p 進 L -函数) が構成することができるのだが、本研究により、先行研究では取り扱われていない自明な指標に対応する特殊化についても取り扱うことが可能となった。

また、上述の結果からの応用として (池田氏によって特定の条件下で定式化されていた) Duke-Imamoglu-池田リフトと本質的に同じ Langlands 関手性を持つような保型形式を、より一般的な形で具体的に構成する方法が得られた。従って、このことから、桂田英典氏との共同研究の結果として既に得られていた Duke-Imamoglu-池田リフトの周期公式 (cf. 後述の項目 5 (1)) の一般化と呼ぶべき**尖点的保型形式の周期公式**が導出されることも明らかとなった。尚、この結果については、現在執筆中の論文によって発表予定である。

参考文献

- [7] Hisa-aki Kawamura, *A semi-ordinary p -stabilization of Siegel Eisenstein series for symplectic groups and its p -adic interpolation*, preprint (2018).
- [8] Hisa-aki Kawamura, *On certain construction of p -adic Siegel modular forms of even genus*, preprint (2010).

[9] T. Berger and K. Klosin, *a p-adic Hermitian Maass lift*, preprint (2016) .

[10] Z. Liu, *Nearly overconvergent forms and p-adic L-functions for symplectic groups*, Ph.D thesis (2016) .

[11] E. Eischen, M. Harris, J. Li and C. Skinner, *p-adic L-functions for unitary groups*, preprint (2016) .

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

(1) Hidenori Katsurada and Hisa-aki Kawamura, *Ikeda 's conjecture on the period of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.111 (2015) , No.2, pp.445-483.

(2) Hidenori Katsurada and Hisa-aki Kawamura, *Koecher-Maass series of a certain half-integral weight modular forms related to the Duke-Imamoglu-Ikeda lift*, Acta Arithmetica, Vol.162 (2014) , No.1, pp.1-42.

[学会発表] (計 1 件)

(1) Hisa-aki Kawamura, *The semi-ordinary p-stabilization of Siegel Eisenstein series for symplectic groups and unitary groups*, Collaborative Number Theory Seminar at Graduate Center , City University of New York, 2017.

[その他]

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

河村 尚明 (KAWAMURA, Hisa-aki)
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号 : 00533746

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :

(4) 研究協力者

()