

平成 30 年 4 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800017

研究課題名(和文) 保型表現のL函数の特殊値と周期

研究課題名(英文) Special values of automorphic L-functions and periods

研究代表者

山名 俊介 (Yamana, Shunsuke)

京都大学・白眉センター・特定助教

研究者番号：50633301

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：一般線形群の許容表現の捻り付き二次対称積L因子の局所理論を整備し、その極を例外表現に関する格別性により特徴付けた。京都大学の池田教授の楕円カusp形式のリフトの構成をヒルベルトカusp形式のリフトに一般化し、ヒルベルト-ジークルカusp形式やヒルベルト-エルミートカusp形式を具体的に構成し、基底問題や二次形式論に応用した。  
Bessel周期を用いて、二次パラモジュラー-ジークルモジュラー形式の反円分 $p$ 進スピルL函数を構成した。  
4次ジークルアイゼンシュタイン級数の非中心微分値のフーリエ係数を計算し、3次ジークルアイゼンシュタイン級数の中心微分値と結び付けた。

研究成果の概要(英文)：I developed a local theory of twisted symmetric square L-factors of representations of general linear groups and characterized its pole in terms of distinction by exceptional representations. I constructed Hilbert-Siegel cusp forms and Hilbert-Hermite cusp forms explicitly by generalizing Ikeda's construction of a lifting of elliptic cusp forms to a lifting of Hilbert cusp forms, and applied it to the basis problem and the theory of quadratic forms.  
I constructed anti-cyclotomic  $p$ -adic spinor L-functions of paramodular Siegel cusp forms of degree 2 by using the Bessel period.  
I computed Fourier coefficients of the non-central derivative of degree 4 Siegel Eisenstein series and relate it to the central derivative of degree 3 Siegel Eisenstein series.

研究分野：整数論

キーワード：L関数 ヒルベルトモジュラー形式 ジークルモジュラー形式 周期 池田リフティング アイゼンシュタイン級数 格別表現 テータ対応

1. 研究開始当初の背景

モジュラー形式とは対称空間上の強い対称性を持つ複素解析関数である。一見解析的なものであるが、アーベル多様体のモジュライ空間のベクトル束の切断と考えることもでき、豊かな代数的幾何的構造も持っている。Langlands はモジュラー形式を群上の関数と考え、その群の作用でモジュラー形式が生成する表現の解析を目的とする保型表現論を創始した。

数学の強力な手法の一つとして、知りたい対象の算術的データを組み込んだフーリエ級数や Dirichlet 級数を考えるというものがある。その級数がモジュラー形式や L 関数なら、研究対象の重要な数論的情報を隠し持つと考えられる。

一変数のモジュラー形式には、エータ関数やデルタ関数、 $j$  関数などの楕円関数論からの例が豊富にあり、この分野の発展に本質的に役立ってきた。それはモジュラー形式の空間に、解析学、代数学、幾何学、数理論理などの異なる由来を持つモジュラー形式がひしめく結果、これら多様な分野が結びつくからである。一方、多変数モジュラー形式の魅力的な事例は、テータ関数や Eisenstein 級数を除いて、池田リフトが知られていた。

モジュラー形式のその定義されている群の適当な部分群上の積分は周期と呼ばれ、L 関数の特殊値と周期の間の等式は周期公式と呼ばれる。L 関数がモジュラー形式の積分として構成できるときは、周期公式は比較的容易に証明される。これまでの筆者の研究では特殊値が 0 であるかどうかだけに注目していたが、

Dirichlet の類数公式や BSD 予想に見られるように、L 関数の特殊値や留数、微分値がどのような算術的情報を含んでいるか調べることはより難しく興味深い問題である。このような問題にはガロア表現や数論幾何学も交錯し、現在まで活発に研究されている。1990 年代前半、Gross と Prasad は L 関数の特殊値と周期に関する一連の予想を提出した。この予想を精密化する周期公式を、京都大学の市野篤史准教授と池田保教授は予想として提出した。

2. 研究の目的

本研究の主たる目的は、L 関数とモジュラー形式のリフトや周期の関係を解明することである。具体的には、モジュラー形式のリフトが存在するための必要十分条件を L 関数の特殊値が 0 でないというような大域的条件と局所的条件を使って与え、更には、L 関数の特殊値とモジュラー形式の周期の関係式を見出し、L 関数の特殊値や留数の数論的あるいは幾何的性質を明らかにすることを目指す。

3. 研究の方法

(1) 跡公式はその収束性において極めて脆弱であり、truncation という操作を使って強引に収束させなければならない。regularized 周期とは、跡公式の truncation を適当に修正して定義される混合 truncation を使ってモジュラー形式の周期積分を収束しない場合にも拡張したもので、Jacquet, Lapid, Rogawski により様々な対称対に関して構成され、ある種の相対跡公式の解析にも応用された。筆者と市野氏は一般線形群の対  $GL(n+1) \times GL(n)$  やユニタリ群の対

$U(n+1) \times U(n)$  などの非対称対の場合に regularized 周期を構成した。一方,  $L$  関数をモジュラー形式と Eisenstein 級数の積の積分として構成する方法は Rankin-Selberg 法と呼ばれ,  $L$  関数や周期の解析的研究に本質的役割を果たす。本研究では regularized 周期の構成を Rankin-Selberg 法に拡張して, カスプ的でないモジュラー形式の周期を研究した。

- (2) 高次のジーゲルモジュラー形式やエルミートモジュラー形式の実例は, 今世紀初頭に池田保氏により構成され, 楕円モジュラー形式から高次モジュラー形式を作り出す池田リフティングと呼ばれている。その構成法は一般化の余地に乏しいものだったので, 同氏は表現論を活用した構成法も考案した。その方法は, 退化主系列表現の退化 Whittaker 汎関数の一意性とそのフーリエ-ヤコビ係数の帰納的構造を利用するもので, 改良の余地は多くあると思われる。本研究ではこの構成法を見直すことから始めた。

#### 4. 研究成果

- (1) 筆者と Weissmann 研究所の Eyal Kaplan 氏は, Bump と Ginzburg の積分表示を修正して二次対称積  $L$  関数の積分表示の理論を確立し, 捻り付き二次対称積  $L$  関数の極を三重積周期によって特徴付けた。このときに現れる三重積周期が 0 にならないモジュラー形式やその局所類似を格別表現と呼ばれる。さらに積分表示の理論をカスプ形式から一般のモジュラー形式に一般化して, 平方可積分なモジュラー形式や Eisenstein 級数の三重積周期を計算し, 格別平方可積分表現を分類し, 多くの局所格別表現を構成した。さらに

Rankin-Selberg 法の局所積分の理論を構築して, 捻り付き局所二次対称積  $L$  因子を定義し, 平方可積分表現の場合に Lannlands の  $L$  因子と一致することを示し, その極の特徴付けを与えた。さらにユニタリ表現の場合に局所三重線形形式の一意性を証明した。例外表現の Whittaker 模型の消滅は従来, 剰余標数が 2 でない場合にだけ証明されていたが, 剰余標数が 2 の場合も含めて一般的に証明した。その結果, 従来剰余標数が 2 でない場合にのみ証明されていた多くの結果が剰余標数 2 の体にも拡張された。

- (2) 筆者が証明を簡略し, フーリエ級数を与える方法を見出し, 楕円モジュラー形式の一般化であるヒルベルト-モジュラー形式のリフティングを与えた。池田氏と筆者が構成したヒルベルト-ジーゲルモジュラー形式は, 降下法により構成できる生成的モジュラー形式と対極的な最も退化した正則カスプ形式であり, 従来の研究より明示的である。類似の構成でヒルベルトモジュラー形式からヒルベルト-エルミートモジュラー形式のリフティングを構成した。その構成から馴分岐レベルのエルミートカスプ形式を明示的フーリエ級数で与えた。テータ対応と組み合わせることで CAP と呼ばれるクラスのカスプ形式を構成した。これらのモジュラー形式を基底問題に応用した。実例として, 有理数体に 2 の平方根を付け加えた数体上の 4 次テータ関数の空間を解析した。
- (3) スピン  $L$  関数の中心値と 2 次ジーゲルモジュラー形式の Bessel 周期の関係式が, 30 年以上前に Boecherer に予想され, 2016 年に古澤昌秋氏と森本和輝氏に証明された。昨年度筆者は, 一般の Boecherer 予想を仮定して, 2

次ジーゲルモジュラー形式の反円分  $p$  進スピノール関数を構成した。平方因子がないレベルのパラモジュラー形式に対して明示的  $p$  進補間式が証明され、ウェイト 2 の場合も含めて証明したので、アーベル曲面の算術理論への将来的応用が期待できると思う。

- (4) モジュラー多項式と呼ばれる 2 変数多項式は、同種な楕円曲線の組を分類する。19 世紀に Hurwitz と Kronecker は、モジュラー多項式が定める複素曲線の組の交点数を計算した。1993 年 Gross と Keating は、この交点数が重さ 2 の 2 次 Eisenstein 級数のフーリエ係数に現れることを発見したことに加えて、3 つのモジュラー多項式の算術交点数を計算した。この算術交点数が重さ 2 の 3 次 Eisenstein 級数の中心微分に現れることが知られている。これらの研究から着想を得て筆者は、4 つのモジュラー多項式の交叉が有限になる必要十分条件を見出し、それと関係すると推察される重さ 2 の 4 次 Eisenstein 級数の非中心微分を計算した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

1. S. Yamana, On poles of the exterior cube L-functions for  $GL(6)$ , *Mathematische Zeitschrift* 279 (2015) 267-270.
2. S. Yamana, Periods of residual automorphic forms, *Journal of Functional Analysis* 268 (2015) 1078-1104.
3. S. Yamana, Local symmetric square L-factors of representations of general linear groups, *Pacific Journal of Mathematics* 286 (2017) 215-256.
4. S. Yamana and E. Kaplan, Twisted

symmetric square L-functions for  $GL(n)$  and invariant trilinear forms, *Mathematische Zeitschrift* 285 (2017) 739-793.

5. S. Yamana, Siegel series for skew Hermitian forms over quaternion algebras, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 87 (2017) 43-59.
6. S. Yamana, Periods of automorphic forms: the trilinear case, *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 17 (2018) 59-74.
7. S. Yamana, Periods of automorphic forms: the case of  $(U(n+1) \times U(n), U(n))$ , *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 査読有。  
〔学会発表〕(計 27 件)
  1. Symmetric square L-functions of  $GL(n)$ , Oberwolfach Workshop, Modular Forms, オーベルヴォルヴァッハ数学研究所, 2014 年 4 月.
  2. Periods of residual automorphic forms, Banff workshop on “The future of trace formulas”, バンフ, 2014 年 6 月.
  3. Periods of residual automorphic forms, Summer School in Paris on “The Gan-Gross-Prasad conjectures”, パリ 7 大学, 2014 年 6 月
  4. Poles of Exterior cube L-functions for  $GL(6)$ , Building Bridges Workshop on Automorphic Forms and Related Topics, University of Bristol, 2014 年 7 月.
  5. Poles of Exterior cube L-functions for  $GL(6)$ , 日韓整数論セミナー, 慶應義塾大学, 2014 年 11 月.
  6. 局所二次対称積 L 関数と三重線形形式, RIMS 研究集会, 京都大学, 2015 年 2 月.
  7.  $GL(6)$  の三重交代積 L 関数, 日本数学会

- 2015 年度代数学文科会, 明治大学, 2015 年 3 月.
8. Local symmetric square L-functions and invariant trilinear forms. Representation theory and number theory workshop, National University of Singapore, Singapore, 2015 年 4 月.
  9. Gan-Gross-Prasad conjecture for metaplectic groups, 第三回京都保型形式研究集会, 京都大学, 2015 年 6 月.
  10. On the lifting of Hilbert cusp forms to holomorphic cusp forms on quaternionic unitary groups, East Asia Number Theory Conference (EANTC 2015), Elysian Ganchon, Chuncheon, Korea, 2015 年 8 月.
  11. A lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms, Workshop on Automorphic Forms and Representations, University of Rijeka, Croatia, 2015 年 9 月.
  12. On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms, RIMS 研究集会「保型形式、保型的 L 関数とその周辺」京都大学, 2016 年 2 月.
  13. On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Hermitian cusp forms, RIMS 研究集会「保型形式、保型的 L 関数とその周辺」京都大学, 2016 年 2 月.
  14. On the lifting of Hilbert cusp forms to holomorphic cusp forms on quaternionic unitary groups, 南大阪保型表現セミナー, 大阪市立大学, 2016 年 2 月.
  15. On the lifting of Hilbert cusp forms, International Workshop: New Developments in Representation Theory, National University of Singapore, Singapore, 2016 年 3 月.
  16. On the lifting of Hilbert cusp form, 早稲田大学整数論研究集会 2016, 早稲田大学西早稲田キャンパス, 2016 年 3 月.
  17. On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms, 研究集会「Relative Trace Formula, Periods, L-Functions, Harmonic Analysis and Langlands Functoriality」, Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), 2016 年 5 月.
  18. On certain families of CAP representations for metaplectic and orthogonal groups, 研究集会「Automorphic Forms on Metaplectic Forms and Related Topics」, Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Pune, 2016 年 7 月.
  19. On the lifting of Hilbert cusp forms, 研究集会「Building Bridges: 3<sup>rd</sup> EU/US Summer School + Workshop on Automorphic Forms and Related Topics」, University of Sarajevo, 2016 年 7 月.
  20. CAP representations indexed by Hilbert cusp forms, 研究集会「Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory 2016」, National Taiwan University, 2016 年 9 月.
  21. The CAP representations indexed by Hilbert cusp forms, 研究集会「19<sup>th</sup> Autumn Workshop on Number Theory, Archimedean local theory of automorphic forms」, 白馬ハイマウントホテル, 2016 年 11 月.
  22. Endoscopic A-packets for unitary groups, RIMS 研究集会「保型形式とその周辺」京都大学, 2017 年 2 月.
  23. Modular forms and representation number, 研究集会「The 2<sup>nd</sup> KGTU Mathematics Research Workshop for Young Researchers」, 京都大学, 2017 年 2 月.

24. The number of representations of a symmetric matrix by a quadratic form, 研究集会「第10回ゼータ若手研究集会」名古屋大学, 2017年2月.
25. The global theta correspondence and Rallis' inner product formula, Hodge conjecture on Unitary Shimura Varieties and  $A_q(\ )$ , 岡山大学, 2017年3月.
26. On the lifting of endoscopic cusp forms on  $U(3)$  to cusp forms on  $U(4m+3)$ , 研究集会「New directions in automorphic forms and L-functions」, University of Prishtina, コソボ共和国, 2017年7月7日.
27. Derivative of Eisenstein series of weight 2 and intersection numbers, 研究集会「Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics」, 大阪市立大学, 大阪, 2017年9月19日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 出願年月日：  
 国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 取得年月日：  
 国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://syamana.sub.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山名 俊介 (Yamana Shunsuke)  
 京都大学白眉センター 特定助教  
 研究者番号：50633301

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：

(4) 研究協力者

( )