

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800021

研究課題名(和文) 保型表現とL函数の特殊値

研究課題名(英文) Automorphic representations and special values of L-functions

研究代表者

森本 和輝 (Morimoto, Kazuki)

神戸大学・理学研究科・講師

研究者番号：20725254

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：保型表現に付随するL函数の特殊値と保型形式の周期との関係について研究した。LapidとMaolによって予想されたWhittaker周期の明示公式を、偶数次ユニタリ群の場合にいくつかの条件を満たす保型表現について証明した。さらに、その証明で重要な役割を果たした局所等式を用いることでこの場合の形式次数予想を証明した。また、古澤昌秋氏(大阪市立大)との共同研究によって、Siegel保型形式に付随するL函数の中心値とspecial Bessel周期とを結び明示公式を証明することができた。

研究成果の概要(英文)：We studied a relationship between special values of automorphic L-functions and periods of automorphic forms. Under certain assumptions, we proved an explicit formula of Whittaker periods for even unitary group, which is a conjecture by Lapid and Mao. Using a certain local identity which played an important role in the proof of this explicit formula, we proved formal degree conjecture in this case. Further, in a joint work with Masaaki Furusawa (Osaka City University), we proved an explicit formula relating special Bessel periods and central values of automorphic L-functions associated to Siegel modular forms.

研究分野：保型L函数

キーワード：保型表現 L函数 保型形式の周期

## 1. 研究開始当初の背景

現代の数論の研究において、ゼータ関数はその中心に位置している。特に、その特殊値は Birch & Swinnerton-Dyer 予想や Bloch-Kato 予想が示すように、数論的情報を豊富に含んでいると期待されている。

一方で、志村-谷山予想を含む予想である Langlands 予想によると、ガロア表現、モチーフ、保型表現といった数論の対象の間には L 関数の一致を通して対応が存在すると期待されている。このことから、保型表現・保型形式に付随する L 関数の特殊値は数論的な情報を豊富に含むと期待できる。特に、保型形式の周期と特殊値との関係はこの観点から興味深い問題である。しかしながら、特殊値と周期の関係が明らかにされた場合は多くない。本研究は、このような状況を背景とし、特殊値と周期との関係を解析的・算術的に明らかにするために開始されたものである。

## 2. 研究の目的

(1) Deligne はモチーフに付随する L 関数の臨界点での特殊値は Deligne 周期を除いて、代数的数になると予想した。Langlands 予想により保型表現に付随する L 関数についても同様の代数性が期待できる。GL(2)の保型表現のテンソル積 L 関数などでこのような代数性が考察されているが、代数性が証明されている場合は多くない。本研究では、新たな場合である  $S_0(n, 2)$  と GL(2)の保型表現のテンソル積 L 関数の特殊値について、その代数性を目指すものである。

(2) Waldspurger により GL(2)の保型形式のトラス周期と適当な L 関数の中心値とを結ぶ明示公式が証明されていた。この明示公式は p 進 L 関数の構成といった算術的応用や、様々な解析数論的応用を与えていた。Boecherer は Waldspurger の定理の一般化として、Siegel 保型形式に対して、そのフーリエ係数の和で定義される special Bessel 周期と Siegel 保型形式に付随する L 関数の中心値とを結ぶ明示公式を予想した。Waldspurger の定理と同様に、Boecherer 予想の様々な解析数論的応用が最近考察されている。本研究では、この予想への相対跡公式による証明を目指した取り組みの一環として、GL(2)の場合に Boecherer 予想の場合へ一般化できるような新たな相対跡公式を確立し、Waldspurger の定理の再証明を目指すものである。本研究は Kimball Martin 氏 (University of Oklahoma) と古澤昌秋氏 (大阪市立大) との共同研究として開始した。

(3) 本研究は申請時には無かった研究テーマである。Lapid と Mao は準分裂代数群とメタプレクティック群上の Whittaker 周期に関して、適当な L 関数の特殊値との間の明示公

式を予想した。

彼らはメタプレクティック群の場合には或る局所等式へと明示公式が還元できることを示し、非アルキメデス体上でその局所等式を一般に証明した。

平賀-市野-池田は離散系列表現の不変量である形式次数を局所ガンマ因子の特殊値で表す明示公式を予想し、最近その精密化が Gan-市野, Gross-Reeder により予想された (形式次数予想)。市野-Lapid-Mao は上の局所等式と形式次数予想との同値性を示し、Lapid-Mao の結果から非アルキメデス体上のメタプレクティック群の場合に形式次数予想を証明した。反対に、実アルキメデス素点では、形式次数予想は平賀-市野-池田により本質的に証明されており、この素点での離散系列表現の Lapid-Mao の局所等式が従う。このことから、基礎体・実素点での適当な仮定のもとでこの明示公式が証明できる。

Lapid と Mao はユニタリ群の場合には適当な仮定のもとで予想が類似の局所等式へと還元できることを証明していた。本研究は偶数次ユニタリ群の場合の明示公式の確立と、局所等式の応用としてこの場合の形式次数予想の証明を目指すものである。

## 3. 研究の方法

(1) GL(2) の正則保型形式に対して、 $S_0(n+1, 2)$  の正則な Klingen Eisenstein 級数を定義することができる。この Eisenstein 級数と与えられた  $S_0(n, 2)$  の正則保型形式との内積をとることで、 $S_0(n, 2)$  と GL(2) のテンソル積 L 関数の積分表示が得られると期待できる。n=3 の場合には、この積分表示は古澤氏により与えられており、これはその一般化である。積分表示が構成できれば、非アルキメデス素点上での局所ゼータ積分の解析的・算術的性質の考察、また実素点上での局所ゼータ積分の明示的計算に取り組む。これらと Harris による保型形式の代数性についての結果を用いることで、特殊値の代数性を目指す。

(2) 本研究は Waldspurger の定理の一般化である Boecherer 予想を目標とし、その第一歩として新たな相対跡公式による Waldspurger の定理の再証明を試みたものであったが、期間中に Boecherer 予想へより確実性の高い新たなアプローチの着想を得たため、手法を変えて Boecherer 予想の証明に取り組む。この取り組みは古澤氏との共同研究である。

直交群の保型表現に対して、Bessel 周期と L 関数の中心値とを結ぶ明示公式を予想した Refined Gross-Prasad 予想の  $S_0(2n+1)$  の特別な場合、実際、special Bessel 周期の場合の Refined Gross-Prasad 予想から Boecherer 予想が従うことが Dickson-Pitale-Saha-Schmidt により知られていた。本研究では  $S_0(2n+1)$  の special Bessel 周期の場合の

Refined Gross-Prasad 予想に取り組む。

この問題へのアプローチとしてテータ対応と呼ばれる保型表現の構成方法を用いる。テータ対応では直交群上の保型表現に対し、メタプレクティック群上の保型表現が構成できる。その構成方法から表現がゼロとなる可能性があるが、この非消滅性と適当な  $L$  函数の特殊値の非消滅性との間の関係が山名俊介氏により近年証明された。また、テータ対応により special Bessel 周期とメタプレクティック群上の Whittaker 周期との間に関係がある事は古澤氏により考察されていた。これらの関係を精緻に調べることで、Refined Gross-Prasad 予想をメタプレクティック群上の Whittaker 周期の Lapid-Mao の明示公式へ帰着させることにより証明する。

(3) メタプレクティック群の場合には、局所等式は Lapid-Mao により非アルキメデス素点では一般に、また市野-Lapid-Mao により実素点では離散系列表現の場合に証明されていた。彼らの手法に倣い証明に取り組む。非アルキメデス体上では、モデルと呼ばれる表現の実現に対して、モデル間の変換公式を示し、さらに種々の解析的問題を解決することにより証明を目指す。

市野-Lapid-Mao は局所体上のメタプレクティック群に対し、形式次数予想と離散系列表現の場合の Lapid-Mao の局所等式とが同値であることを示していた。上記の局所等式が完成すれば、彼らに倣い、非アルキメデス体上の形式次数予想に取り組み、実アルキメデス体では反対に、形式次数予想を用いて、Lapid-Mao の局所等式に取り組む。

また、Lapid-Mao の局所等式への還元の説明では大域 Descent 法と呼ばれる保型表現の構成方法の既約性が偶数次ユニタリ群の場合に必要である。Ginzburg-Jiang-Soudry がメタプレクティック群の場合に類似の既約性を証明しており、この方法に倣い偶数次ユニタリ群の場合の証明に取り組む。

#### 4. 研究成果

(1) 積分表示の構成において、不分岐計算が最も重要な部分である。Ginzburg-Rallis-Soudry は類似の場合に不分岐計算を行っており、彼らの計算の理論的な解釈について考察した。実際、加藤-村瀬-菅野の公式を用いることで計算が非常に簡単になることが分かった。

一般斜交群  $GSp(4)$  に対して、 $PGSp(4)$  と  $SO(3,2)$  とが同型であることが知られている。この場合の積分表示は、一般ユニタリ群  $GU(2,2)$  の Klingen Eisenstein 級数と  $GSp(4)$  の正則保型形式との内積と言い換えることができる。この場合には、Eisenstein 級数の pull-back 公式を組み合わせる事で、一般の場合に比べて代数性の証明は容易になる。実際、重さがスカラーの場合に適当な仮定のも

とで以前の論文でその代数性を証明していた。

一般の  $SO(n,2)$  の場合への足がかりとして、この場合の代数性をベクトル値の場合を含めた非常に一般的な状況へと拡張した。この一般化における問題点は実素点での局所ゼータ積分の明示計算にあった。この問題を吉田リフトとその代数性・周期関係式を用いることで、解決することができた。

また、この場合には無限素点では  $GSp(4)$  と同型である内部形式に対して、その上の保型形式についても同様の代数性を証明することができる。この代数性の系として、 $GSp(4)$  と内部形式の間に Jacquet-Langlands 対応と同様に、ほとんど全ての素点で同型であり、無限素点で同型な保型表現が存在すれば、それぞれの Petersson 内積の間に周期関係式が成り立つことが証明できた。この結果をまとめた論文は現在投稿中である。

(2) Refined Gross-Prasad 予想の前段階として、周期と中心値の非消滅の同値性についての予想である Gross-Prasad 予想に取り組んだ。この問題についてもテータ対応と  $L$  函数の特殊値の関係についての山名氏の結果を用いることで、非常に一般の状況で周期の非消滅から中心値の非消滅が証明できた。また、適当な仮定のもとで中心値の非消滅から周期の非消滅も証明することができた。この結果をまとめた古澤氏との共著論文は Math. Ann. に掲載された。

さらに、上記の結果の証明を精緻に調べることで、 $SO(2n+1)$  の保型表現の無限成分が離散系列表現の時に、Refined Gross-Prasad 予想は、special Bessel 周期がゼロでなければメタプレクティック群の場合の Lapid-Mao の Whittaker 周期の明示公式へと帰着できる事を示し、special Bessel 周期についての Refined Gross-Prasad 予想を証明することができた。先に述べたようにこの結果の特別な場合として、Boecherer 予想を証明することができた。また、Arthur 予想を  $SO(2n+1)$  の内部形式について仮定すれば、special Bessel 周期がゼロの場合にもこの明示公式が成り立つことがわかった。この結果をまとめた古澤氏との共著論文は現在投稿中である。

(3) Ginzburg-Jiang-Soudry の方法に倣い、Residual Eisenstein 級数の Fourier 係数を精緻に調べる事で、大域 Descent の既約性を証明することが出来た。さらに、その応用として、大域 generic な保型表現の重複度一定理や、非アルキメデス体上の偶数次ユニタリ群に対して局所逆定理等の応用を証明することが出来た。これらの結果をまとめた論文は Tran. of the AMS. に掲載予定である。

また、Lapid-Mao に倣いユニタリ型の  $GL(n)$  の表現や、それらにより与えられる適当な Langlands 商表現に対してモデルの変換公式

を証明した。このモデルの変換公式では Lapid-Mao の場合とは異なり、変換が或るデータによる事が分かった。この結果を纏めた論文は IMRN に掲載予定である。

これらの結果と、或る Oscillatory 積分の stability といった解析的な結果を解決することで、Lapid-Mao により予想された局所等式を非分裂な非アルキメデス素点において証明することができた。

市野-Lapid-Mao の方法に倣いこの場合にも、形式次数予想と離散系列表現の場合の局所等式とが同値であることが実アルキメデス・非アルキメデス体上で証明することができ、上記の結果からこの場合の形式次数予想を解決することができた。一方で、実アルキメデス素点では形式次数予想は本質的に平賀-市野-池田により証明されていた。従って、この同値性から実アルキメデス素点上の離散系列表現の場合の Lapid-Mao の局所等式が従う。このことから、基礎体が総実体・分裂素点で不分岐・実素点で離散系列を満たす保型表現については Lapid-Mao が予想した明示公式が成り立つ。

上の同値性の証明において、表現の局所因子のひとつである局所ガンマ因子が重要な役割を果たしている。局所ガンマ因子は様々な方法によって定義されるが、それらは適当な正規化をすれば等しいものであると期待されている。実際、同値性の証明のために、志村型積分と Langlands-Shahidi 法により定義された局所ガンマ因子が適当な正規化を除いて一致することを証明した。これは形式次数予想のためだけでなく、 $p$  進調和解析としても重要な結果である。これらの結果をまとめた論文は現在執筆中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Kazuki Morimoto,  
Model transition for representations of unitary type,  
International Mathematics Research Notices, IMRN 掲載決定 (査読有)  
DOI: 10.1093/imrn/rny048

Kazuki Morimoto,  
On the irreducibility of global descents for even unitary groups and its applications,  
Transactions of the American Mathematical Society, 掲載決定 (査読有)  
DOI: <https://doi.org/10.1090/tran/7119>

Masaaki Furusawa and Kazuki Morimoto,

On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for  $SO(2n+1) \times SO(2)$   
Mathematische Annalen, 368 (2017), no. 1-2, 561-586 (査読有)  
DOI: 10.1007/s00208-016-1440-z

Kazuki Morimoto,  
On special values of L-functions for quaternion unitary groups of degree 2 and  $GL(2)$ ,  
Oberwolfach Reports, No.22 (2014), 1259-1261 (査読無)

[学会発表](計 16 件)

森本和輝  
On a certain local identity for an explicit formula of Whittaker periods on the even unitary group,  
Workshop “Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics”,  
2017年9月21日  
大阪市立大学

森本和輝  
On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for  $SO(V)$  and  $GL(2)$ ,  
New Developments in Representation Theory,  
2016年3月8日  
Institute for Mathematical Sciences, シンガポール

森本和輝  
On the irreducibility of global descents for even unitary groups and its applications,  
南大阪保型表現セミナー  
2016年2月12日  
大阪市立大学

森本和輝  
ユニタリ型表現のモデルの変換公式について  
第60回代数学シンポジウム  
2015年9月2日  
静岡大学

森本和輝  
On special values of tensor product L-functions for  $SO(V)$  and  $GL(2)$ ,  
Automorphic Seminar,  
2015年6月28日、  
Ben-Gurion University, イスラエル

森本和輝

Model transition for representations  
of unitary type,  
Annual meeting of the Israel  
Mathematical Union,  
2015年5月31日、  
Herods Dead Sea Hotel, イスラエル

森本和輝

On special values of L-functions for  
quaternion unitary groups of degree 2  
and  $GL(2)$ ,  
Oberwolfach Workshop“ Modular Forms ”,  
2014年5月1日  
Mathematisches Forschungsinstitut  
Oberwolfach, ドイツ

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

森本 和輝 (MORIMOTO KAZUKI )  
神戸大学・大学院理学研究科・講師  
研究者番号 : 20725254