

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 20 日現在

機関番号：51501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800024

研究課題名(和文) Brumer-Stark予想を中心とした岩澤理論の精密化の研究

研究課題名(英文) Study on a refinement of Iwasawa theory with a focus on the Brumer-Stark conjecture

研究代表者

三浦 崇 (Miura, Takashi)

鶴岡工業高等専門学校・その他部局等・助教

研究者番号：60631934

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：岩澤理論の精密化という観点から、代数体のイデアル類群のFittingイデアルをL関数の特殊値を用いて記述する研究を行った。総実代数体上アーベルなCM拡大体で、円分体とは異なるGalois群の構造をもつもの、すなわちGalois群が分岐素点の惰性群の直積と同型にはなっていないような場合について研究し、そのイデアル類群のFittingイデアルをいくつかの条件のもとでほぼ決定することができた。さらにその手法をあるタイプの射類群の研究に応用することでBrumer-Stark予想の精密化の研究を行った。これによってBrumer-Stark予想に関して部分的な精密化を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We make a study on describing the Fitting ideal of the ideal class group of a number field by using special values of L-functions, which we may regard as a certain type of refinement of Iwasawa theory. We have almost determined under certain conditions the Fitting ideal of the ideal class group of a CM-field which is abelian over a totally real number field whose Galois group is not similar to that of the cyclotomic fields. Namely we studied the case that the Galois group is not isomorphic to the direct product of the inertia groups of ramifying primes. Applying such a method as used in the research on the ideal class groups to investigating the ray class groups, we also make a study on a certain type of refinement of the Brumer-Stark conjecture and obtain partial results.

研究分野：代数学

キーワード：整数論 岩澤理論 イデアル類群

1. 研究開始当初の背景

代数体のイデアル類群への Galois 群の作用は整数論の様々な問題と結びつく重要な研究対象の一つである。岩澤主予想とは、代数体の円分 \mathbb{Z}_p 拡大におけるイデアル類群の射影極限の特性多項式が、 p 進 L 関数と一致することを主張するものであり、Mazur-Wiles によって証明された 20 世紀数学の大きな定理の一つである。岩澤主予想の一般化や精密化の試みは、多くの人々によって追及・研究がなされ、急速に発展している分野である。その一つの方向性として、栗原将人氏は[1]において、有限次代数体のイデアル類群の Fitting イデアルを、 L 関数の特殊値によって定義される Stickelberger 元を用いて完全に記述するという予想を提出し、ある条件下で予想が正しいことを証明した。本研究の研究代表者は栗原氏との共同研究[2]によってこの結果をさらに拡張し、一般の虚アーベル拡大体に対して 2-成分を除いて予想が正しいことを証明した。また同じ共同研究において、総実代数体 k 上のアーベル拡大体 K で CM 体であるものに対して、そのイデアル類群の p -成分の Fitting イデアルを次のような条件のもとで決定することもできた。すなわち、 K は 1 の p 乗根を含まず、 p の上の素点は全て K/k で不岐であり、 $\text{Gal}(K/k)$ は惰性群の直積と同型である、という 3 つの条件である。これらの 3 条件を緩め一般の総実代数体上のアーベル拡大に対してもイデアル類群の Fitting イデアルを決定することがその後の課題となっていた。

イデアル類群の Fitting イデアルを決定する問題は Brumer 予想に直接の応用を持つ場合がある。イデアル類群の Fitting イデアルに Stickelberger 元が属することが示されれば、それはイデアル類群の零化域イデアルに属することになり Brumer 予想が直ちに従う。しかしながら、[3]により一般には Stickelberger 元がイデアル類群の Fitting イデアルに属さない場合があることが知られている。Brumer 予想を解くためにはイデアル類群の Fitting イデアルを決定するだけでは不十分であるが Brumer 予想へのアプローチとして有効な手段の一つであることには変わりはない。Brumer 予想の精密化である Brumer-Stark 予想はあるタイプの射類群の零化域イデアルに Stickelberger 元(を少し修正したもの)が属することと同値であり、その種の射類群の Fitting イデアルを決定することで Brumer-Stark 予想を解くことができる可能性がある。実際に、Greither-Popescu は[4]において同変岩澤主予想の帰結として、 p 進 L 関数が自明な零点を持たない場合に Brumer-Stark 予想が成り立つことを証明している。そこで、イデアル類群の Fitting イデアルを決定する手法を用いて、自明零点がある場合にも射類群の Fitting イデアルを決定することで、Brumer-Stark 予想を解くこ

とができないか、という問題を考えるに至った。

さらに、このような問題の楕円曲線類似とも言うべき予想が Mazur-Tate によって提起されている ([5] Conjecture 3)。[1]において栗原氏は楕円曲線が通常還元を持つ素数 p に対して、多くの場合にこの予想が成り立つことを証明している。そこで用いられた手法はイデアル類群の Fitting イデアルを決定するときに用いられたものと類似のものであった。超特異還元を持つ素数に対しては、岩澤主予想から情報を引き出そうとした場合、小林真一氏の定義した \pm -Selmer 群を用いて Mazur-Tate 予想を定式化し直す必要があると考えられる。そして、イデアル類群を調べるときに用いた手法を応用することで、 \pm -Selmer 群に関する Mazur-Tate 予想(の変形版)に関して何が言えるか、そこからオリジナルの Mazur-Tate 予想に関して何が言えるか、という問題を考えるに至った。

参考文献

- [1] M. Kurihara, Iwasawa theory and Fitting ideals, *J. reine angew. Math.* **561** (2003), 39-86.
- [2] M. Kurihara and T. Miura, Stickelberger ideals and Fitting ideals of class groups for abelian number fields, *Math. Annalen* **350** (2011), 549-575.
- [3] M. Kurihara and T. Miura, Ideal class groups of CM-fields with non-cyclic Galois action, *Tokyo Journal of Maht.* **35** (2012), 411-439.
- [4] C. Greither and C. Popescu, An Equivariant Main Conjecture in Iwasawa theory and Applications, *Journal of Algebraic Geometry* **24** (2015), 629-692.
- [5] B. Mazur and J. Tate, Refined conjectures of the “Birch and Swinnerton-Dyer type”, *Duke Math. J.* **54** (1987), 711-750.

2. 研究の目的

本研究の目的は、大きく 3 つある。

(1) まず一つ目は、総実代数体 k 上のアーベル拡大 K で、その Galois 群が惰性群の直積と同型でない場合に、 K のイデアル類群の Fitting イデアルを Stickelberger 元を用いて記述することである。アーベル体の場合には、Galois 群が惰性群の直積と同型となる場合だけが本質的であり、この場合を考察することでイデアル類群の Fitting イデアルを決定することができた。一般の総実代数体上のアーベル拡大を考えることで Galois 群が惰性群の直積と同型にならないという困難が生じるが、これは総実代数体上のアーベル拡大の岩澤理論の精密化を目指す上で対処すべき問題の一つである。本研究では、比較的

扱い易い状況と思われる, K が 1 の p 乗根を含まず, p の上の素点が K/k で不分岐である場合に, (Galois 群の構造に関しては上で述べたような仮定を置かず) イdeal類群の Fitting イdealを決定することを目指す.

(2) 二つ目の目的は, イdeal類群の Fitting イdealを決定する手法を, あるタイプの射類群の Fitting イdealを調べることに応用し, Brumer-Stark 予想を証明することである. ある条件を満たす k の素点の有限集合 T に対して, T に属する素点の上にある K の素点の (1 次) 積によって定義されるモジュラスを考える. このモジュラスに対応する K の射類群を T -分岐イdeal類群と呼ぶことにする. また T に属する素点に対応する Euler 因子を Stickelberger 元に掛けたものを T -modified Stickelberger 元と呼ぶことにする. Brumer-Stark 予想は, ある条件を満たす任意の素点の集合 T に対して, T -modified Stickelberger 元が, T -分岐イdeal類群を消すということと同値であることが知られている. 従って, もし T -分岐イdeal類群の Fitting イdealに T -modified Stickelberger 元が属することが分かれば, 直ちに Brumer-Stark 予想を導くことができる. 本研究では, T -分岐イdeal類群の Fitting イdealを完全に決定することを目指とする. これは Stickelberger 元に対して, 本来の Brumer-Stark 予想よりも精密な意味づけを与えるものでもある.

(3) 三つ目の目的は, 有理数体上で定義された楕円曲線で p で超特異還元を持つものに対する Mazur-Tate 予想の \pm -版を定式化し, これを証明することである. すなわち適切にモジュラー元の \pm -版を定義し, それが \pm -Selmer 群の Pontryagin 双対の Fitting イdealに属するということを証明する. さらに本来の Mazur-Tate 予想についてどの程度のことと言えるのかを検証する.

3. 研究の方法

目的の (1) については, 現在までの手法を発展させながら研究を行う. 総実代数体上 k 上のアーベル拡大 K で, p の上の素点が K/k で分岐せず, K が 1 の原始 p 乗根を含まないときに Greither によって計算されている岩澤加群の Fitting イdealを Wiles の自明零点回避の方法を用いて有限次元に降下させる. これによって Fitting イdealと Stickelberger 元によって生成される Stickelberger イdealの包含関係が導かれると考えられるが, さらに Fitting イdeal, Stickelberger イdealの群環における指数を計算することで両者の等号を示す計画である.

目的の (2) については, (1) で用いた手法を T -分岐イdeal類群に適用することを試みる. T -分岐イdeal類群の円分 \mathbb{Z}_p 拡

大方向への射影極限 (T -分岐岩澤加群と呼ぶ) の Fitting イdealは, いくつかの条件下で Greither によって計算されているが, T が p の上の素点を含む場合は計算されていない. K/k で p の上の素点が不分岐であるような場合には T が p の上の素点を含む場合にも T -分岐イdeal類群の Fitting イdealを調べる必要があり, この場合は T -分岐岩澤加群の Fitting イdealを決定しなければならないという問題がある.

目的の (3) については, \pm -Selmer 群を用いて Mazur-Tate 予想を定式化し直すことで楕円曲線の岩澤主予想 (の片側の包含) を適用できるようにする. さらに B.D.-Kim による control theorem を用いることで有限次元への降下を試みる.

4. 研究成果

まず目的の (1) について得られた結果を述べる. $\text{Gal}(K/k)$ が位数 2 の巡回群と基本アーベル p -群の直積と同型であり, K は 1 の p 乗根を含まず, K/k において p の上の素点が不分岐であり, さらに K/k における分岐素点の分解群が $\text{Gal}(K/k)$ の p -Sylow 群に含まれているような場合には, K のイdeal類群の Fitting イdealと Stickelberger イdealの等号を”ほぼ”証明することができた.”ほぼ”の意味は, K のイdeal類群の Fitting イdealが Stickelberger イdealに含まれ, Stickelberger イdealの p 倍を含むという包含を証明することができたということである. K/k における分岐素点に関して更なる条件を課せば, Fitting イdealと Stickelberger イdealの等号を完全に示すことができた. K/k における分岐素点が p 個以上の素点に分解する場合にも, Fitting イdealと Stickelberger イdealの間の上で述べたような包含関係を得ることができたがかなり粗い結果となっている. これらの結果の精密化が今後の課題である.

目的 (2) については次のような結果を得ることができた. K は 1 の p 乗根を含まず, K/k で p の上の素点是不分岐とする. k の素点の集合 T が p の上の素点を含まないような場合については, T -分岐イdeal類群の Fitting イdealを決定することができた. その系として T -modified Stickelberger イdealが T -分岐イdeal類群を消すことが分かり, この条件下での Brumer-Stark 予想へ一歩前進することができた. しかしながら, T が p の上の素点を含む場合に関しては当初期待していたような進展は得られず, 本結果から Brumer-Stark 予想が帰結されたわけではない.

Brumer-Stark 予想については, Greither 氏との共同研究において, 当初の計画とは別の方向からも研究を行った. T -分岐イdeal類群の Fitting イdealを完全に決定するの

ではなく、群環や T -分岐イデアル類群のノルムによる商を考え、その Fitting イデアルを決定しようという試みである。これは T -分岐イデアル類群の Fitting イデアルとは少しずれるため、一見 Brumer-Stark 予想を帰結できるようには見えない。しかしながら、ある議論によって T -modified Stickelberger 元が T -分岐イデアル類群を消すことを示すことができる。研究当初の Brumer-Stark 予想の精密化を得るといふ目的からは少し外れるが、Brumer-Stark 予想自体は証明できるかもしれない期待がある。ノルムによる商を考えることは、 T -分岐イデアル類群が Galois 加群として cohomologically trivial になるため（精密な情報の一部を失うものの）扱い易くなるという利点がある。この方針で、Brumer-Stark 予想の証明に後一步のところまで進展が得られたが、 T -分岐岩澤加群の計算に関して一か所困難があり、完全な証明には至ってはならず、今後の課題である。

目的(3)については、 \pm -版の予想の妥当性をいくつかの具体的な数値例で検証した。これによってモジュラー元の \pm -版を正しく定義するという問題に関して知見が深まったと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 3 件)

Takashi Miura, “On the Fitting ideals of the ideal class groups of non-cyclic abelian CM-extensions”, Japan-Korea Joint Seminar on Number Theory and Related Topics 2014, 慶應義塾大学, 2014 年 11 月 19 日.

三浦崇, “ p 進 L 関数の Stickelberger 構成”, 2014 年度整数論サマースクール「非可換岩澤理論」, 小豆島ふるさと村, 2014 年 8 月 28 日.

三浦崇, “総実代数体上のアーベル拡大体のイデアル類群の Fitting イデアルについて”, 大阪大学整数論 & 保型形式セミナー, 大阪大学, 2014 年 4 月 25 日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等 特になし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三浦 崇 (MIURA Takashi)

鶴岡工業高等専門学校・創造工学科・助教

研究者番号: 60631934

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし

(4) 研究協力者

該当なし