

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：11401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800030

研究課題名(和文) 三次元多様体の幾何構造と線形表現に対するライデマイスタートーションの漸近挙動

研究課題名(英文) The geometric structures of 3-manifolds and the asymptotic behavior of the Reidemeister torsion for linear representations

研究代表者

山口 祥司 (Yamaguchi, Yoshikazu)

秋田大学・教育文化学部・准教授

研究者番号：30534044

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：三次元多様体の幾何構造は大きく双曲構造とザイフェルト構造に分けることができる。本研究ではザイフェルト構造をもつ三次元多様体であるザイフェルト多様体に着目し、基本群の高次元線形表現に対するライデマイスタートーションがなす数列について増大度と主要項の係数の極限值を決定した。さらに主要項の係数の極限值が表す幾何学的性質を解明できた。本研究では高次元線形表現に対するライデマイスタートーションを具体的に記述することで上記の成果を導くことに成功した。

研究成果の概要(英文)：The geometric structures of 3-manifolds can be classified into the hyperbolic structures and the Seifert structures. This study has focused on 3-manifolds called Seifert manifolds, which admit Seifert structures, and determined the growth order of the asymptotic behavior of the higher-dimensional Reidemeister torsions and the limits of leading coefficients. Moreover the geometric meaning of the limit of leading coefficient was revealed. These results were derived from the explicit descriptions of the higher-dimensional Reidemeister torsions for Seifert manifolds.

研究分野：幾何学

キーワード：トポロジー 三次元多様体 ザイフェルト多様体 ライデマイスタートーション 基本群 線形表現
漸近挙動 オービフォールド

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初は双曲三次元多様体の双曲体積がライデマイスタートーションと呼ばれる位相不変量のなす数列の漸近挙動から導出されるという結果が報告されていた(引用文献)。漸近挙動とは発散する数列の一般項の増大する様子を記述することであり、双曲三次元多様体とは双曲距離という二点間の距離を測る方法をもつ三次元的な図形(幾何学的な対象)である。双曲距離では三点を結んでできる三角形の内角の和は180度未満になるという特徴がある。位相不変量とは図形の特徴を抽出した数値や多項式などのうち、図形を連続的に変形した前後で変化しない性質を持つもののことである。ライデマイスタートーションとは、幾何学の中で長く研究されてきた位相不変量の一つである。

三次元多様体は幾何構造に注目すると大きく双曲多様体とザイフェルト多様体と呼ばれる多様体に分割することができる。ここで幾何構造とは距離の測り方と2点間の距離を変化させない対称変換のことを指す(ユークリッド平面でいえば、通常の線分の長さによって距離を測り、2点間の距離を保つ変換として平行移動、回転移動、線対称移動が考えられる)。

双曲多様体とは異なる幾何構造をもつザイフェルト多様体においてライデマイスタートーションの漸近挙動の研究はほとんど手づかずの状態であり、本研究の代表者がトーラス結び目の外部空間という特別なザイフェルト多様体に対して増大度の評価を行った結果(引用文献)が存在しているだけであった。

ザイフェルト多様体におけるライデマイスタートーションの研究は具体的な計算例などが部分的に知られていたが、計算結果を俯瞰し漸近挙動とザイフェルト多様体の幾何学的な特徴との関連を見出す研究は知られていなかった。ここでザイフェルト多様体の幾何学的性質とは、ザイフェルト多様体が共通にもつ錘(すい)特異点をもつ曲面上の円周束の構造のことを指している。

2. 研究の目的

ザイフェルト多様体と呼ばれる三次元多様体に対して、ライデマイスタートーションと呼ばれる位相不変量を組織的に構成し、その不変量がなす数列の漸近挙動とザイフェルト多様体の幾何学的特徴との関係を調べることが本研究の目的の概要である。

三次元多様体の基本群から行列群への準同型写像のことを基本群の線形表現という。基本群とは図形の中のループ(閉曲線)の集合に「連続的に変形する」、「つなぎあわせる」という操作を計算規則として導入した数学的対象のことである。基本群の線形表現は三次元多様体の幾何構造を反映する重要な研究対象であることが知られている。また基本群の線形表現は位相不変量と組み合わせる

ことで、多様体の幾何学的性質も反映することが知られている。基本群の線形表現を利用してライデマイスタートーションという位相不変量を組織的に構成する方法が知られており、構成された不変量たちは「基本群の n 次元線形表現に対するライデマイスタートーション」と呼ばれている。本研究の目的は、ザイフェルト多様体の n 次元線形表現に対するライデマイスタートーションを構成して得られる数列の漸近挙動とザイフェルト多様体の幾何構造の関係を解明することである。ただし、不変量の値は指数関数的に増減するので対数をとった状態で考察している。この研究目的を実現するために、具体的に以下の二点を研究目標として設定した:

(1)基本群の n 次元表現に対するライデマイスタートーションの構成をザイフェルト多様体に適用し、ライデマイスタートーションのなす数列の変数 n における増大度の決定を行う。ここで増大度の決定とは、数列の一般項の増減と同じような増減をもつ単項式を見つけることを意味する。数列の一般項が n を大きくしたとき、 n の k 乗と同じ増加の様子をもつときには、数列の増大度は n の k 乗と同じであると定める。

(2)基本群の n 次元線形表現に対するライデマイスタートーションのなす数列の漸近挙動における主要項の係数について極限の決定と得られた極限值に表れる幾何学的特徴を抽出する。主要項とは数列の増大度を表す単項式のことであり、主要項の係数の極限とは、数列の増大度が n の k 乗と同じとき、数列の一般項と n の k 乗の比をとった分数式において n を無限に大きくしたときの極限のことである。 n 次元線形表現に対するライデマイスタートーションから構成される数列についてこの分数式の極限を求め、さらに得られた極限とザイフェルト多様体の幾何学的な性質(ザイフェルト構造)との関連を見出す。

3. 研究の方法

具体例の考察を一般的な対象に拡張するという方針のもと、研究目標(1)(2)それぞれについて以下のような研究手法を計画および実施した:

(1)トーラス結び目の外部空間という構造がよく知られているザイフェルト多様体に対して、基本群の n 次元線形表現に対するライデマイスタートーションがなす数列の漸近挙動を考察する。

(2)トーラス結び目の外部空間のもつザイフェルト構造に着目し、(1)のトーラス結び目の外部空間における考察を一般のザイフェルト多様体の考察に拡張する。

出発点となるトーラス結び目の外部空間に対するライデマイスタートーションについては、研究代表者による先行研究(引用文献、)を基礎研究として参考にした。引用文献では、 n 次元線形表現のライデマイスタートーションのなす数列について変数 n に関する増大度の部分的解答(評価式)を与えている。また引用文献の中では、トーラス結び目の外部空間のザイフェルト構造とライデマイスタートーションの計算結果の関係を記述している。代表者自身の先行研究をもとにトーラス結び目の外部空間に対するライデマイスタートーションの考察から出発し、得られた考察を一般のザイフェルト多様体に適用できるように理論の拡張と整備を行う方法で研究を遂行した。

4. 研究成果

当初の研究目標(1)(2)を達成し、研究成果をまとめた論文が学術雑誌に掲載決定された。また、本研究で取り上げているライデマイスタートーションの漸近挙動と三次元多様体の幾何学的性質の関連は、単一の幾何構造だけでなく複数の幾何構造を部分的にもつ三次元多様体に対しても考察が期待されている。今回の研究期間内に、ザイフェルト多様体を貼り合わせて構成され、幾何構造を二つもつ三次元多様体に対してもライデマイスタートーションの漸近挙動の考察を進めることができた。限定されたザイフェルト多様体の貼り合わせではあるが、二つのザイフェルト多様体を貼り合わせた三次元多様体に対してライデマイスタートーションの漸近挙動における増大度と主要項の係数の極限を具体的に計算し書き下すことができた。この研究成果をまとめた論文も学術雑誌に掲載が決定されている。したがって、当初の目標を上回る研究成果が得られたといえる。

研究目標(1)(2)について得られた成果をまとめると以下の三点となる(以下でもライデマイスタートーションは対数をとったものを考えている)：

(1) すべてのザイフェルト多様体に対して、 n 次元線形表現のライデマイスタートーションのなす数列の増大度は、線形表現の次元 n と同じになることを証明することができた。双曲多様体の場合は、 n 次元ライデマイスタートーションのなす数列の増大度は n の二乗である。今回得られた成果と双曲多様体に対する研究結果との比較によって、 n 次元線形表現に対するライデマイスタートーションのなす数列の増大度の違いが、三次元多様体の幾何構造の違いを反映することを解明できた。

(2) 一般のザイフェルト多様体に対して、ライデマイスタートーションの漸近挙動における主要項の係数の極限を与える公式を

構成できた。この公式から、ザイフェルト多様体の基本群の線形表現の選び方は無数に存在するが、主要項の係数の極限は有限個の可能性しか存在しないことが判明した。さらに極限值を与える公式から最大の極限値は、次の(3)で述べるようにザイフェルト構造を決定する有理数であることを証明することができた。

(3) ザイフェルト多様体の位相幾何学的な性質であるザイフェルト構造は、オービフォールドと呼ばれる錘(すい)特異点をもつ曲面によって決定される。(2)の研究結果から、ライデマイスタートーションの漸近挙動において主要項の係数の極限の最大値から、オービフォールドのオイラー標数が導出されることを解明した。特にこの最大値を与える漸近挙動を実現する基本群の線形表現は、線形表現の集合の中でも最大次元の部分集合に属するという特徴をもつことをホモロジー球面とよばれるザイフェルト多様体について明らかにすることもできた。

以上の三点は、すべてのザイフェルト多様体が共通にもつザイフェルト構造に着目して、トーラス結び目の外部空間に対して行った n 次元線形表現のライデマイスタートーションの考察と計算を一般のザイフェルト多様体にも適用可能な考察および計算に拡張することで達成された。一般のザイフェルト多様体についてもライデマイスタートーションの計算を詳細に記述できた点が研究を進める上で非常に大きな役割を果たした。ここで蓄積したライデマイスタートーションを具体的に計算し記述する手法を応用して、二つのザイフェルト構造を部分的にもつ三次元多様体のライデマイスタートーションの漸近挙動の考察も行うことができた。得られた成果は以下のようなになる：

(4) 二つのザイフェルト構造を部分的にもつ三次元多様体として、トーラス結び目の外部空間と厚みのついたクラインの壺という二種類のザイフェルト多様体に分解可能な三次元多様体に着目し、ライデマイスタートーションの漸近挙動を考察した。これらの三次元多様体に対して、基本群の n 次元線形表現に対するライデマイスタートーションのなす数列の漸近挙動において増大度を決定し、主要項の係数の極限を求めることができた。特に、増大度の決定と極限の計算結果においてトーラス結び目の外部空間と厚みのついたクラインの壺の影響を明示することができた。この結果は三次元多様体を幾何構造に着目して分割することで、ライデマイスタートーションの漸近挙動の考察も各幾何構造の部分ごとに分割して行える可能性を示唆している。

<引用文献>

Pere Menal-Ferrer and Joan Porti, "Higher-dimensional Reidemeister torsion invariants for cusped hyperbolic 3-manifolds", *Journal of Topology*, vol. 7, pp. 69-119 (2014).
Yoshikazu Yamaguchi, "Higher even dimensional Reidemeister torsion for torus knot exteriors", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 155, pp. 297-305 (2013).

山口 祥司, "Note on the asymptotics of the higher dimensional Reidemeister torsion for Brieskorn manifolds", *数理解析研講録「Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds」*, 1836, pp. 181-191 (2013).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

Anh T. Tran and Yoshikazu Yamaguchi, "The asymptotics of the higher dimensional Reidemeister torsion for exceptional surgeries along twist knots", *Canadian Mathematical Bulletin*, Online first (2017), 査読有

DOI:10.4153/CMB-2017-021-5

Yoshikazu Yamaguchi, "A surgery formula for the asymptotics of the higher-dimensional Reidemeister torsion and Seifert fibered spaces", *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 66, pp. 463-493 (2017), 査読有

DOI: 10.1512/iumj.2017.66.6012

Yoshikazu Yamaguchi, "Twisted Alexander polynomials, character varieties and Reidemeister torsions of double branched covers", *Topology and its Applications*, vol. 204, pp. 278-305 (2016), 査読有

DOI: 10.1016/j.topol.2016.03.021

[学会発表](計 6件)

Yoshikazu Yamaguchi, 「On the asymptotic behavior of the Reidemeister torsion for toroidal surgeries along twist knots」, 国際研究集会「Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds」, 2016年10月27日, 奈良女子大学(奈良県)
山口 祥司, 「Asymptotic behavior of Reidemeister torsion for toroidal surgeries along twist knots」, 日本

数学会トポロジー分科会一般講演, 2016年9月17日, 関西大学千里山キャンパス(大阪府)

山口 祥司, 「Reidemeister torsion and exceptional surgeries along the figure eight knot」, 国際研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2016」, 2016年3月8日, 広島大学(広島県)

山口 祥司, 「On the Reidemeister torsion and toroidal surgeries along the figure eight knot」, 東北結び目セミナー2015, 2015年10月23日, 霞城セントラル(山形県)

山口 祥司, 「The asymptotics of the Reidemeister torsion for Seifert manifolds and $PSL(2, R)$ -representations of Fuchsian groups」, 日本数学会トポロジー分科会一般講演, 2015年3月23日, 明治大学駿河台キャンパス(東京都)

Yoshikazu Yamaguchi, 「The asymptotics of the Reidemeister torsion for a Seifert manifold and $SL(2, R)$ -representations」, 国際研究集会「Quantum Topology and Physics 2014 in Fukuoka」, 2014年9月20日, 九州大学西新プラザ(福岡県)

[図書](計 0件)
特になし。

[産業財産権]

出願状況(計 0件)
特になし。

取得状況(計 0件)
特になし。

[その他]
ホームページ等
http://www.gipc.akita-u.ac.jp/~shouji/index_ja.html

6. 研究組織

(1)研究代表者
山口 祥司(YAMAGUCHI, Yoshikazu)
秋田大学・教育文化学部・准教授
研究者番号: 30534044

(2)研究分担者
特になし。

(3)連携研究者
特になし。

(4)研究協力者
特になし。