

平成 30 年 5 月 31 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800032

研究課題名(和文)線形表現のモジュライ空間と非可換トーシオン不変量

研究課題名(英文)Moduli spaces of linear representations and non-abelian torsion invariants

研究代表者

北山 貴裕 (Kitayama, Takahiro)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：10700057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：当研究課題は基本群の線形表現のなす空間と3次元多様体の非可換トーシオン不変量の研究の相互発展を図った。その結果、3次元多様体を本質的に分解するような全ての曲面は、高次元表現のなす空間の無限遠点から構成されることが明らかになった。また、トーシオン不変量を線形表現のなす空間の上の関数と見做すことで、無限遠点から構成される曲面のホモロジー類が当関数のその点におけるある正則性によって制限されることが見出された。更に、数論的位相幾何学の見地から、結び目に対して有限体上の2次元表現の変形が定める新しいトーシオン不変量が導入された。

研究成果の概要(英文)：The project aimed at mutual development of the studies on spaces of linear representations of fundamental groups and non-abelian torsion invariants of 3-manifolds. As a result we showed that all surfaces essentially splitting 3-manifolds are constructed from points at infinity of spaces of representations of high dimensions. Regarding torsion invariants as functions on spaces of linear representations, we also discovered that the homology classes of surfaces constructed from points at infinity are restricted by certain regularity at the points of the functions. Moreover, from the point of view of arithmetic topology we introduced a new type of torsion invariants for knots defined from deformations of representations of dimension 2 over finite fields.

研究分野：位相幾何学

キーワード：3次元多様体 位相不変量 表現

### 1. 研究開始当初の背景

トーシオン不変量は基本群の線形表現が一つ与えられたときに定まる3次元多様体の不変量であり、基本群の非可換な情報をよく反映し、トポロジーの多様な文脈に深く関わる研究対象である。トーシオン不変量のこれまでの研究では、研究代表者を含む国内外の研究者によって、まず第一に考えるべきであった、可換表現に付随する古典的な不変量を持つ基本性質や応用の「非可換化」を図る研究が進められ、当研究はほぼ完成したといえる。

当分野が今後解決すべき課題は、

- (1) どの表現に付随する不変量を考えるべきかという問題に解答を与えること、
- (2) 基本群の高次元線形表現のモジュライ空間の応用を基礎付けること、
- (3) 不変量を非可換化したことで初めて現れる性質の探求

である。およそ基本群の  $SL_n$ -表現の共役類の空間である  $SL_n$ -指標多様体の視点を導入し、トーシオン不変量をこの代数的集合上の正則関数と捉え直して、表現の摂動に伴う不変量の振る舞いを調べることが処方箋になる。また、原隆氏との先行研究において確立された、 $SL_2$ -指標多様体の無限遠点から3次元多様体を本質的に分解する曲面(本質的曲面)を構成する Culler-Shalen 理論の  $SL_n$ -指標多様体の場合への一般化が足掛かりになる。

### 2. 研究の目的

本研究では、基本群の線形表現のモジュライ空間と3次元多様体の非可換トーシオン不変量の研究を双方向的な視点から相互に発展させることを目的とした。本研究によって、研究が未成熟である、高次元線形表現のモジュライ空間の低次元位相幾何学への応用が促されることが期待される。上述の今後解決すべき課題へのアプローチとして、次の研究の発展を目指した。

- (1)  $SL_n$ -指標多様体上の正則関数としてのトーシオン不変量の記述法とその性質を追究する。特に、古典的な Culler-Shalen 理論へのトーシオン不変量の応用を図る。
- (2)  $n$  が3以上の場合に、 $SL_n$ -指標多様体の無限遠点に対応する3次元多様体の分解を究明する。特に、本質的曲面が構成されるための十分条件と  $n$  が2の場合には現れない分解の例を見出す。

### 3. 研究の方法

(1) トーシオン不変量を  $SL_n$ -指標多様体上の正則関数として扱う上で、寺嶋郁二氏との先行研究において確立された、円周上の曲面束のトーシオン不変量を、ファイバー曲面の理想三角形分割に付随するクラスター代数と呼ばれる複素数体上の代数によって、組み合わせ的に記述する方法を用いた。また、Dunfield, Friedl, Jackson によって結び目の補空間に対して予想されていた、トーシ

オン不変量の一つであるねじれ Alexander 多項式の Culler-Shalen 理論への応用可能性に着目した。また、整数論における Galois 表現に付随して定まる L 関数の研究の、3次元多様体論における類似的研究を試みた。

(2) 3次元多様体的一种であるザイフェルト多様体の具体例に対して、 $SL_3$ -指標多様体の無限遠点と多様体の分解との対応を計算することを試みた。Przytycki と Wise によって示されていた、本質的曲面が定める基本群の部分群の分離性に着目することで、基本群の高次元表現の族を組織的に構成する方法を見出した。また、 $SL_2$ -指標多様体の場合に Culler, Gordon, Luecke, Shalen によって知られていた、無限遠点から構成される本質的曲面の境界成分を指標多様体上の基本的な関数の位数によって判別する方法の、一般の  $SL_n$ -指標多様体の場合への拡張を図った。

代数幾何学の深い知識を要する局面では、数論幾何学の専門家である原隆氏との議論に十分時間を割くことで対応した。また、数論的位相幾何学の専門家である森下昌紀氏、丹下稜斗氏、寺嶋郁二氏と共同研究を行った。更に、3次元多様体及びトーシオン不変量の専門家であるレーゲンスブルク大学の Stefan Friedl 氏の研究室を訪問し、同研究室に所属していた Matthias Nagel 氏とも共に共同研究を行った。

### 4. 研究成果

(1) Stefan Friedl 氏と Matthias Nagel 氏との共同研究において、3次元多様体内の任意の本質的曲面はある  $n$  について  $SL_n$ -指標多様体の無限遠点から構成されることを明らかにした。 $SL_2$ -指標多様体の無限遠点からは構成されない本質的曲面があることは既に知られていた。この研究によって、原隆氏との先行研究における予想が肯定的に解決され、高次元線形表現のモジュライ空間の3次元多様体論への応用に対する基礎付けが前進したといえる。

(2)  $SL_n$ -指標多様体の無限遠点から構成される本質的曲面が固定されたホモロジー類を代表するための必要条件として、ねじれ Alexander 多項式の最高次係数が誘導する  $SL_n$ -指標多様体上の関数の無限遠点における正則性に関するものを得た。これは結び目の補空間とその  $SL_2$ -指標多様体の場合に対する Dunfield, Friedl, Jackson による予想を肯定的に解決するもので、一般の3次元多様体とその  $SL_n$ -指標多様体の場合にまで、より広く成り立つものであることが明らかになった。

(3) トーラス境界を持つような3次元多様体に対して、 $SL_n$ -指標多様体の無限遠点から構成される本質的曲面の境界成分は、境界トーラス上のループに付随する  $SL_n$ -指標多様体上の基本的な関数の無限遠点における正則性によって判別できることを明らかにした。これは  $SL_2$ -指標多様体の場合に Culler,

Gordon, Luecke, Shalen によって知られていた結果を一般化するものであり,  $A$  多項式の一般化である  $SL_n$ - $A$  多様体の新しい応用を基礎付けることが期待される.

(4) 森下昌紀氏, 丹下稜斗氏, 寺嶋郁二氏との共同研究において, まず, 結び目群の有限体上の 2 次元表現の普遍変形に付随するねじれ Alexander 加群が適当な条件の下でねじれ加群であることを示し, この加群の位数としてある  $L$  関数を導入した. この性質は Mazur が Galois 表現の普遍変形に付随する Selmer 加群に対して提唱していたものの結び目群に対する類似的命題と見做せ, この  $L$  関数は Selmer 加群から定まる代数的  $p$  進  $L$  関数の類似物と見做せる.

研究代表者が組織委員を務めた国際研究集会 The 12th East Asian School of Knots and Related Topics (東京大学, 2017 年 2 月) では, 低次元位相幾何学に関連する諸話題を巡って広く学术交流が行われた. 集会には多くの若手研究者が参加し, 当該分野の今後の発展に寄与したものと期待される. また, 研究代表者は 2014 年度と 2015 年度に東京工業大学において東工大トポロジーセミナー, 2016 年度と 2017 年度に東京大学においてトポロジー火曜セミナーの世話人を務めた. これらのセミナーの開催は, 当研究の発展と大学院生等の多くの若手研究者を含む学术交流のために大変有益であった.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

(1) S. Friedl, T. Kitayama and M. Nagel, A note on the existence of essential tribranched surfaces, *Topology Appl.* 225 (2017), 75-82, 査読有り.

(2) T. Kitayama, Normalization of twisted Alexander invariants, *Internat. J. Math.* 26 (2015) 1550077 (21 pages), 査読有り.

(3) T. Kitayama, Twisted Alexander polynomials and incompressible surfaces given by ideal points, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 22 (2015), 877-891, 査読有り.

(4) T. Kitayama and Y. Terashima, Torsion functions on moduli spaces in view of the cluster algebra, *Geom. Dedicata* 175 (2015), 125-143, 査読有り.

(5) T. Kitayama, Twisted Alexander polynomials and ideal points giving Seifert surfaces, *Acta Math. Vietnam.* 39 (2014) 567-574, 査読有り.

(6) S. Friedl and T. Kitayama, The virtual

fibering theorem for 3-manifolds, *Enseign. Math.* 60 (2014), 79-107, 査読有り.

[学会発表](計 9 件)

(1) T. Kitayama, Torsion polynomial functions and essential surfaces, *Low Dimensional Topology and Number Theory X*, 九州大学産学官連携イノベーションプラザ, 2018 年 3 月 26 日

(2) T. Kitayama, Representation varieties and essential surfaces, *New Development in Teichmüller Space Theory*, 沖縄科学技術大学院大学, 2017 年 11 月 30 日.

(3) T. Kitayama, Representation varieties detect splittings of 3-manifolds, *Invariants in Low-dimensional Topology*, Korea Institute for Advanced Study, 韓国, 2017 年 5 月 10 日.

(4) T. Kitayama, Representation varieties detect splittings of 3-manifolds, *The second Australia-Japan Geometry, Analysis and their Applications*, 京都大学, 2017 年 1 月 31 日.

(5) T. Kitayama, Representation varieties detect splittings of 3-manifolds, *Rigidity School*, Nagoya 2016, 名古屋大学, 2016 年 7 月 29 日.

(6) T. Kitayama, Representation varieties detect essential surfaces, *Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics* 2016, 広島大学, 2016 年 3 月 7 日.

(7) T. Kitayama, Representation varieties detect essential surfaces, *Geometry of Moduli Space of Low Dimensional Manifolds*, 京都大学, 2015 年 12 月 17 日.

(8) T. Kitayama, Representation varieties detect essential surfaces I, II, *Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds*, 奈良女子大学, 2015 年 10 月 29 日, 30 日.

(9) T. Kitayama, Representation varieties detect essential surfaces, *Braids, Configuration Spaces and Quantum Topology*, 東京大学, 2015 年 9 月 8 日.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kitayama/index.html>

## 6．研究組織

### (1)研究代表者

北山 貴裕 (KITAYAMA, Takahiro)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：10700057