

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800033

研究課題名（和文）標準計量の存在問題とGIT安定性

研究課題名（英文）Existence problem of canonical Kaehler metrics and GIT-stability

研究代表者

新田 泰文 (Nitta, Yasufumi)

東京工業大学・理学院・助教

研究者番号：90581596

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：まず、次元が4以下であるトーリック・ファノ多様体で一様相対Ding安定であるものを完全に決定した。次に偏極トーリック多様体の一様相対K-安定性がmodified K-energyの強圧性を導くことを示した。また、偏極トーリック多様体が定めるDelzant多面体のデータを使った一様相対K-安定性の十分条件を得た。この条件はトーリック・ファノ多様体においては相対Ding-安定性と同値である。特に相対Ding-安定なトーリック・ファノ多様体は一様相対K-安定性であることが分かる。

研究成果の概要（英文）：Firstly, we clarified all the uniformly relatively Ding stable toric Fano manifolds whose dimensions are four or less. Next, we showed that the uniform relative K-stability for polarized toric manifolds implies the coercivity of the modified K-energy. Furthermore, we gave a sufficient condition for uniform relative K-stability by using the Delzant polytope corresponding polarized toric manifolds. For toric Fano manifolds, our sufficient condition is equivalent to the relative Ding-stability. In particular, we can see that the relative Ding-stability implies the uniform relative K-stability for toric Fano manifolds.

研究分野：複素微分幾何学

キーワード：定スカラー曲率ケーラー計量、端的ケーラー計量、一般化されたケーラー・アインシュタイン計量、強K-安定性、相対K-安定性、相対Ding-安定性

1. 研究開始当初の背景

コンパクトケーラー多様体上の既約な正則ベクトル束に対して「Hermitian-Einstein 計量を持つことと Mumford-Takemoto の意味で安定であることは同値」であることがベクトル束における Hitchin-Kobayashi 対応として知られている。その多様体版として、偏極多様体に対して「偏極類が定スカラー曲率ケーラー計量 (以下 CSCK 計量という) を含むことと K-安定であることは同値であろう」という予想が考えられ、これは現在 Yau-Tian-Donaldson 予想としてよく知られている。この問題は近年ファノ多様体の場合に Tian, Chen-Donaldson-Sun らによって肯定的に解決された。一般の場合は「偏極類が CSCK 計量を含めば K-安定である」ことが Stoppa や満洲俊樹氏らによって示されたが、逆向きの予想は未解決であり、有効と思われる証明の方針も知られてはいなかった。また、CSCK 計量の存在を示すには K 安定性では不十分であり、もっと強い安定性概念が必要なものではないかという議論もあり、実際 Donaldson や Szekelyhidi、満洲氏らがより強い安定性の概念を提唱していた。このように、一般偏極の場合は適切な安定性概念が何であるかという所から見通しが明らかであるとは言えない状況であった。

他方、CSCK 計量の種々の一般化に対しても Yau-Tian-Donaldson 予想の自然な類似が考えられている。満洲氏は CSCK 計量の一般化の一つである端的ケーラー計量に対して「偏極多様体に対して偏極類が端的ケーラー計量を含むことと相対 K-安定であることは同値であろう」という予想を提示して、端的ケーラー計量の研究における一つの方向を示した。ここでも、上述と同様に相対 K 安定性よりも強い安定性概念に関する議論があった。

2. 研究の目的

本研究の目的は大きく分けて以下の 2 つである。

(1) Yau-Tian-Donaldson 予想において K 安定性よりも強い安定性概念として満洲氏による強 K 安定性と Szekelyhidi, Dervan, Boucksom-久本-Jonsson らによる一様 K 安定性が知られている。これらの安定性概念およびその K 安定性との関係を精密に調べ、CSCK 計量の存在と同値になるような安定性を明らかにする。また、端的ケーラー計量の存在問題に対しては上記安定性の“相対版”が考えられるが、これらについても同様の問題を考える。

(2) CSCK 計量および端的ケーラー計量の存在と安定性が同値であることが証明されたとしても、与えられた偏極多様体がそれらの計量を持つか、あるいは安定であるかどうかを判定することは別問題である。そこで、

計量の存在や安定性を実際に判定できる特徴付けを確立する。例えば、偏極トーリック多様体の (強、あるいは一様) K-安定性に対応する Delzant 多面体のデータによって特徴付ける。

3. 研究の方法

(1) 偏極トーリック多様体の一様相対 K 安定性について、久本氏が導入した被約 J ノルムを使って研究を行った。偏極トーリック多様体の相対 K-安定性については Zhou-Zhu による先行研究があり、端的ケーラー計量やそれを臨界点として特徴付ける modified K-energy との関係が知られている。我々はこの結果をさらに推し進めて一様相対 K-安定性との関係にアプローチを試みた。また、Wang-Zhu によって任意のトーリック・ファノ多様体はケーラー・リッチソリトンを持つことが知られているが、その端的ケーラー計量版として「任意のトーリック・ファノ多様体は端的ケーラー計量を持つか？」という問題を考えることができる。実際、次元が 2 以下のトーリック・ファノ多様体は全て端的ケーラー計量を持つことが知られている。このことが高次元の場合にも成り立つかどうかを考えるのは興味深い問題である。安定性の観点からは「全てのトーリック・ファノ多様体は (強、あるいは一様) 相対 K-安定か？」という問題も考えられるが、ここでも上述の Zhou-Zhu の方法を使ったアプローチを試みた。

(2) 2017 年初頭に、Yao によってトーリック・ファノ多様体上の一般化されたケーラー計量の存在問題に大きな進展があった。一般化されたケーラー計量とは満洲氏が導入したケーラー・アインシュタイン計量の一般化であり、端的ケーラー計量ともケーラー・リッチソリトンとも異なるものである。Yao はトーリック・ファノ多様体に対して (一様) 相対 Ding-安定性を導入し、一般化されたケーラー・アインシュタイン計量の存在と一様相対 Ding-安定性が同値であることを証明した。(一様) 相対 Ding-安定性は (一様) 相対 K 安定性を導くことから、この結果は端的ケーラー計量の存在との関係も示唆される。以上のことに触発されて、最終年度はトーリック・ファノ多様体の一様相対 Ding 安定性について集中的に研究を行った。その方法は主に Delzant 多面体上の凸関数の解析による。また、計算機を使って具体的なトーリック・ファノ多様体の (一様) 相対 Ding-安定性について組織的な計算を行った。

4. 研究成果

本研究で得られた成果は以下の通りである。

(1) 次元が 4 以下であるトーリック・ファ

ノ多様体で一様相対 Ding 安定であるものを完全に決定した。(齋藤俊輔氏、四ッ谷直仁氏との共同研究。ただし次元が2の場合はYaoによる)Yaoの結果と合わせると、この結果は次元が4以下であるトーリック・ファノ多様体で一般化されたケーラー・アインシュタイン計量を持つものを完全に決定したことになる。また、我々の分類からさらに次の事実が得られた。(i)3次元および4次元トーリック・ファノ多様体で一般化されたケーラー・アインシュタイン計量を持たないものが存在する。このことは、トーリック・ファノ多様体上には常にケーラー・リッチソリトンが存在するというWang-Zhuの結果と対照的な結果であるといえよう。(ii)次元が4以下である相対Ding安定なトーリック・ファノ多様体は全て一様相対Ding安定である。一般に相対Ding安定なトーリック・ファノ多様体が常に一様相対Ding安定であるかどうかは未解決である。ただし、多様体の特異点を許容する場合には反例があることがYaoによって知られている。この問題をさらに掘り下げていくことは今後の課題としたい。以上の結果は現在共著論文“Relative GIT stabilities of toric Fano manifolds in low dimensions”としてプレプリントサーバーarXivにおいて確認することができる。

(2) 偏極トーリック多様体の一様相対K安定性がmodified K-energyのJ汎関数に対するある種の強圧性を導くことを示した。さらに、偏極トーリック多様体に対応するDelzant多面体のデータを使った一様相対K安定性の十分条件を得た。(齋藤俊輔氏、四ッ谷直仁氏との共同研究)偏極トーリック多様体の相対K安定性についてはZhou-Zhuによる先行研究があり、対応するDelzant多面体のデータを使った十分条件が知られている。我々はこの事実を推し進め、彼らの十分条件がさらに一様相対K安定性を導くことを示した。また、この十分条件に関連して次の結果が得られた。(i)次元が3以下であるトーリック・ファノ多様体で一様相対K安定であるものを完全に決定した。(その中に端的ケーラー計量を持たない3次元トーリック・ファノ多様体が含まれていたが、これは既にYotsutani-Zhouによって知られていることだった)(ii)トーリック・ファノ多様体において、我々の十分条件は相対Ding-安定性と同値であることを示した。特に、トーリック・ファノ多様体において相対Ding-安定性が一様相対K安定性を導くことが分かる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

(1) Toshiaki Mabuchi and Yasufumi Nitta, Strong K-stability and asymptotic Chow

stability, *Geometry and Analysis on Manifolds*, Progress in Mathematics, vol. 308 (2015) 405-411, 査読あり

[学会発表](計10件)

(1) Yasufumi Nitta, Uniform relative stabilities of polarized toric manifolds, 2017年度福岡大学微分幾何セミナー, 2018年, 福岡大学(福岡県)

(2) Yasufumi Nitta, compactness of convex functions and uniform relative K-stability of polarized toric manifolds, 東工大複素幾何セミナー, 2017年, 東京工業大学(東京都)

(3) Yasufumi Nitta, Relative GIT stabilities of toric Fano manifolds in low dimensions, 複素解析幾何セミナー, 2017年, 東京大学(東京都)

(4) Yasufumi Nitta, 標準ケーラー計量の存在問題と多様体の安定性について, 日本数学会 2017年度秋季総合分科会特別講演, 2017年, 山形大学(山形県)

(5) Yasufumi Nitta, Hilbert-Mumford type criteria for stability, 東工大複素幾何セミナー, 2017年, 東京工業大学(東京都)

(6) Yasufumi Nitta, Asymptotic polybalanced kernels on extremal Kaehler manifolds I, II, III, 東工大複素幾何セミナー, 2017年, 東京工業大学(東京都)

(7) Yasufumi Nitta, 偏極多様体における標準計量の存在問題と安定性 I, II, 幾何学阿蘇研究集会, 2016年, 休暇村阿蘇(熊本県)

(8) Yasufumi Nitta, On strong K-stability of polarized algebraic manifolds, Japan-Austria workshop “Transformations and Singularities”, 2016年, 東京工業大学(東京都)

(9) Yasufumi Nitta, On the existence and uniqueness of canonical Kaehler metrics, Geometry seminar, 2015年, Technische Universitat Wien(ウィーン)

(10) Yasufumi Nitta, On strong K-stability of polarized algebraic manifolds, 複素解析幾何セミナー, 2014年, 東京大学(東京都)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
なし

6. 研究組織

(1)研究代表者
新田 泰文(Yasufumi Nitta)
東京工業大学・理学院・助教
研究者番号：90581596

(2)研究分担者
なし ()

研究者番号：

(3)連携研究者
なし ()

研究者番号：

(4)研究協力者
なし ()