

令和元年6月17日現在

機関番号：32657

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2018

課題番号：26800034

研究課題名(和文)写像類群の部分群のコホモロジー群とホモロジー3球面の有限型不変量の研究

研究課題名(英文) A study of cohomology of subgroups of the mapping class group and finite type invariants of homology three spheres

研究代表者

佐藤 正寿 (SATO, Masatoshi)

東京電機大学・未来科学部・准教授

研究者番号：10632010

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：主にハンドル体写像類群のコホモロジー群について研究を行った。一般の種数について、曲面の整数係数1次ホモロジー群に係数をもつハンドル体写像類群の1次ホモロジー群を計算した。これは石田智彦氏との共同研究であり、大阪数学雑誌に掲載された。また種数2のハンドル体写像類群について、整数係数コホモロジー群の計算を行った。種数3のハンドル体写像類群についてはその有理係数コホモロジー群の階数について上からの評価を与えた。またLMO関手についてもいくつかのTorelli群の元とJohnson核の元について計算を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

低次元トポロジーにおいて曲面の写像類群は2次元の図形の対称性を記述する重要な対象である。また、3次元のすべての図形は3次元の基本的な図形の貼りあわせとして記述されるが、その貼りあわせをつかさどるものが曲面の写像類群である。

本研究の興味は、この曲面の対称性の情報と3次元の図形の不変量の関係であり、貼り合わせを表す2次元図形の対称性という群論的対象を通して、3次元の幾何的対象の情報を記述することが目標である。本研究の1つの成果としてハンドル体写像類群のコホモロジー群という群論的対象の情報が得られた。

研究成果の概要(英文)：We studied mainly on the cohomology group of the handlebody mapping class group. For every genus, we computed its first homology group with coefficients in the first integral homology of the boundary surface of the handlebody. This is a joint work with Tomohiko Ishida, and the results are published in Osaka Journal of Mathematics. In genus two case, we also computed the integral cohomology group of the handlebody group. In genus three case, we gave an upper bound on the rank of the rational cohomology group of the handlebody mapping class group. We also computed values of LMO functor on some elements in the Torelli group and Johnson kernel.

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 ハンドル体 円板複体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 曲面の写像類群の有理コホモロジー群は種数について安定的には決定されており、非安定なコホモロジー群も fatgraph 複体、リーマン面のモジュライ空間、Kontsevich のグラフホモロジーを通じた計算がいくつか知られている。この群の代表的な部分群の 1 つとして、ハンドル体写像類群は 3 次元のトポロジーの観点からも重要な対象である。その有理コホモロジー群は Hatcher が安定的に決定したと言われており、群表示も Wajnryb などにより与えられている。この群の非安定な整係数コホモロジー群は低次のものであっても知られておらず、群論的観点からハンドル体写像類群を調べる上で、まずこの低次コホモロジー群を決定することが重要である。

(2) 整ホモロジー 3 球面は、写像類群の部分群である Torelli 群を用いて 2 つのハンドル体を貼り合わせるにより得られる。これを通して整ホモロジー 3 球面の有限型不変量と写像類群の部分群のコホモロジー群は大きく関係している。一方、整ホモロジー 3 球面の有限型不変量は Cheptea-Habiro-Massuyeau により LMO 関手と呼ばれる、ラグランジアンコボルディズムの圏から Jacobi 図の圏への関手として拡張されている。これは特に Torelli 群の降中心列上の準同型を与える。Casson 不変量、Birman-Craggs 準同型、Johnson 準同型以外に新しい準同型がこの LMO 関手から得られるかどうか、また Casson 不変量より高次の有限型不変量が既知の準同型を用いて記述する方法は知られていなかった。

2. 研究の目的

(1) ハンドル体写像類群の低次のコホモロジー群をまず決定することを考える。曲線複体という高次ホモトピー群が自明である単体複体があり、曲面の写像類群の群表示やコホモロジー群などは、Harer などにより当初この複体への作用から多くの情報が得られた。ハンドル体写像類群においてこれに対応するものが円板複体であり、特に曲面の写像類群で Harer によって得られた結果の類似を行うことがハンドル体写像類群を調べる上でまず行うべきことであると考えられる。

(2) LMO 関手と呼ばれる、ラグランジアンコボルディズムの圏からヤコビ図のなす圏への関手が知られており、特にその制限はホモロジーシリンダーからヤコビ図のなす代数へのモノイド準同型を与える。この準同型の中で、3 価グラフに対応する Jacobi 図は整ホモロジー 3 球面の有限型不変量を表し、ツリーの Jacobi 図は写像類群の Johnson フィルトレーションにおける Johnson 準同型を表す。自然な興味として 3 価グラフとツリー以外の Jacobi 図の表す情報の幾何的意味であり、またこれを用いて写像類群の Johnson フィルトレーションなどの代表的な部分群に加群への準同型を構成できるか、ということ調べることを考えた。

3. 研究の方法

(1) 円板複体を用いた既知の結果として、Wajnryb により群表示が求められており、また Kramer により種数 2 のハンドル体写像類群の融合積分が得られている。また円板複体は可縮であるため、曲線複体よりもさらに扱いやすい対象である。これらを用いてハンドル体写像類群の低次コホモロジー群を調べた。

(2) LMO 関手は低次のところであれば、具体的な写像類のタングルへの作用を計算することで計算することができる。Torelli 群や Johnson 核の元についてまずはこの値を調べる。また、簡単な考察により LMO 関手を用いて Johnson フィルトレーション上に準同型が複数構成できるが、まずはこれらの非自明性の観察を試みた。

また Heap により曲面の写像トーラスと曲面の基本群のべき零商の Eilenberg-MacLane 空間への連続写像の組のスピンボルディズム群を用いて、Johnson フィルトレーション上に準同型が構成されている。特に Birman-Craggs 準同型と呼ばれる整ホモロジー 3 球面の Rochlin 不変量を表す写像がこれを用いて表せることが知られており、この写像を調べることを試みた。

4. 研究成果

(1) ハンドル体写像類群について 3 つの結果が得られた。

1 1 つは石田智彦氏との共同研究であり、曲面の整係数 1 次ホモロジー群を係数にもつハンドル体写像類群の 1 次ホモロジー群を決定した。手法としては種数が 3 以下については、Wajnryb により得られた群表示からバー複体を計算した。実際はその表示に誤りがあったのでその修正も行った。また、種数 g のハンドル体写像類群には階数 g の自由群の自己同型群への全射準同型と曲面の写像類群への単射準同型があり、これらを利用し決定を行った。この結果は大阪大学数学雑誌に掲載されている。

2 2 つ目は種数 2 のハンドル体写像類群の整係数コホモロジー群の計算である。Kramer は円板複体を用いて種数 2 のハンドル体写像類群の融合積分を得た。まず、この融合積分に現れるハンドル体写像類群の 3 つの部分群がある有限群の自由群拡大や自由加群拡大であることを示した。特にハンドル体の整係数 1 次ホモロジー群への作用を通して、種数 2 のハンドル体写像類群から階数 2 の一般線型群への全射があるが、これはハンドル体写像類群の融合積分と一般線型群の融合積分の対応を与えていることを示した。この融合積分に Mayer-Vietoris 完全列を用いることで、この融合積分からハンドル体写像類群の整係数コホモロジー群を計算した。

3 3 つ目の結果は種数 3 のハンドル体写像類群の有理係数コホモロジー群の計算である。ハンドル体写像類群は円板複体に作用するが、その部分複体であるメリディアン円板複体は可縮であることが知られている。この作用の同変ホモロジー群を計算することにより、ハンドル体写像類群の上からの評価を行った。特に 2 次有理コホモロジー群が自明であること、3 次コホモロジー群の階数が 1 以下であることを示している。

2 と 3 の結果については、残念ながら研究期間内に発表することができなかった。

(2)

LMO 関手を用いて、Johnson フィルトレーションの上に新しいと思われる準同型が構成できたが、既知の準同型に一致するかどうか現状では不明である。また、LMO 関手の次数 2, 3 の Jacobi 図は Johnson 核上の準同型を与えるが、この部分について LMO 関手の計算を試みた。いくつかの Torelli 群もしくは Johnson 核の元について、LMO 関手の次数 3 までを手で計算することができたが、得た準同型が既知の準同型で書けるかどうかの判定には至っておらず、論文になる結果は得られていない。Heap のスピノルディズム群による準同型についても調べたが、円周や射影平面などへの連続写像のスピノルディズム群は計算されているが、それらの直積空間への連続写像のスピノルディズム群は計算方法が現状なく、具体的な計算を行うことができていない。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 1 件)

Tomohiko Ishida and Masatoshi Sato, A twisted first homology group of the handlebody mapping class group, Osaka J. Math. 54 (2017), No. 3, 587-619, 査読有.

[学会発表](計 12 件)

1 佐藤 正寿, ``On the cohomology group of genus 3 handlebody mapping class group", Workshop "Cohomological study of mapping class groups and related topics", Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg (IRMA), 2018 年 9 月 12 日.

2 佐藤 正寿, ``トラス上の点の順序つき配置空間のコホモロジー群について", 種々の幾何学的構造と基本群に現れる様々な特性類とその不変量への応用, 国家公務員共済組合連合会下呂保養所, 2018 年 8 月 3 日.

3 佐藤 正寿, ``種数 3 のハンドル体写像類群のホモロジー群について", 学習院トポロジーセミナー, 学習院大学, 2017 年 12 月 15 日.

4 佐藤 正寿, ``On the homology group of the genus three handlebody mapping class group", Wednesday afternoon seminar, 京都大学, 2017 年 11 月 24 日.

5 佐藤 正寿, ``種数 3 のハンドル体写像類群のホモロジー群について", 表現論による諸問題への新しいアプローチを目指して, 電気通信大学, 2017 年 11 月 24 日.

6 佐藤 正寿, ``On the homology group of the genus three handlebody mapping class group", Topological invariants in low dimensional topology, 島根大学, 2017 年 11 月 2 日.

7 佐藤 正寿, ``LMO 関手と写像類群の部分群の可換商について", 理学セミナー, 日本女子大学 2016 年 10 月 28 日.

8 佐藤 正寿, ``On the LMO functor constructed by Cheptea, Habiro and Massuyeau", Workshop on finite type invariants of 3-manifolds, 東京大学 2016 年 3 月 30 日.

9 佐藤 正寿, ``種数 2 のハンドル体写像類群の整係数コホモロジー環について", 東工大トポロジーセミナー, 東京工業大学, 2015 年 11 月 26 日.

10 佐藤 正寿, ``On the cohomology ring of the handlebody mapping class group of genus two", トポロジー火曜セミナー, 東京大学, 2015 年 11 月 24 日.

11 Masatoshi Sato, ``On the cohomology ring of the handlebody mapping class group of genus two", Atelier de travail franco-japonais sur la géométrie des groupes modulaires et des espaces de Teichmüller, 東京大学, 2015 年 11 月 19 日.

12 佐藤 正寿, ``種数 2 のハンドル体写像類群のコホモロジー環について", トポロジー金曜セミナー, 九州大学, 2015 年 1 月 22 日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.cck.dendai.ac.jp/math/~msato/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：石田智彦

ローマ字氏名：(ISHIDA, Tomohiko)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。