

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800035

研究課題名(和文) リッチ流の関わる幾何学の研究

研究課題名(英文) Research on geometry involving Ricci flow

研究代表者

横田 巧 (Yokota, Takumi)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：70583855

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では主に、半径の小さい CAT(1)-空間上の確率測度のp重心に関する結果が得られた。CAT(1)-空間とは、曲率が1以下であることを意味する不等式が成り立つ距離空間である。特に、確率測度のp重心の一意存在と、その性質が得られた。これらは非正曲率空間である CAT(0)-空間上で知られていた事実の拡張である。また半径の小さい CAT(1)-空間に値を取る確率変数に対して、確率測度のp重心を用いて定式化される大数の法則が証明できた。

研究成果の概要(英文)：Several results on the p-barycenter of probability measures on CAT(1)-spaces of small radius were obtained. CAT(1)-spaces are metric spaces of curvature at most 1. In particular, the unique existence and some properties of p-barycenter of probability measures on those spaces were obtained. These are extensions of the results known on CAT(0)-spaces. Moreover, the law of large number formulated with p-barycenter of probability measures on CAT(1)-spaces of small radius was proved.

研究分野：距離空間の幾何学

キーワード：CAT(1)-空間

## 1. 研究開始当初の背景

リーマン幾何学において、2002~03年に G. Perelman が 3 次元閉多様体に関するポアンカレ予想および幾何化予想の証明を発表するという大きな進展があった。その証明にはリッチ流 (Ricci flow) と曲率が下に有界な Alexandrov 空間の理論が使われている。リッチ流とは R. Hamilton ('82) が導入した発展型偏微分方程式を解くことによりリーマン多様体を変形する手法のことであり、Alexandrov 空間は断面曲率が下に有界であることを意味する不等式が成り立つ距離空間のことである。

Perelman による進展の後もリッチ流や Alexandrov 空間に関する残された問題は多い。例えばリッチ流に関しては、3 次元閉多様体上の負曲率を持つリッチ流の振る舞いや、一般次元閉多様体上の有限時間特異点におけるスカラー曲率の振る舞い、非コンパクト多様体上のリッチ流などに関して多くの問題が残されている。

Alexandrov 空間に関しては「Gromov - Hausdorff 距離が近い 2 つの有限次元 Alexandrov 空間は双リプシッツ同相であるか」という重要な未解決問題が残されている。この主張は G. Perelman が 2~30 年程前に証明したとされているが、その証明は発表されていない。一方、Perelman の安定性定理は、それら 2 つの Alexandrov 空間が同相であることを主張し、その証明はプレプリントとして発表されている。

現在、Alexandrov 空間の他にも、断面曲率が上に有界な距離空間である CAT-空間や、リッチ曲率が下に有界な測度距離空間である RCD 空間などが活発に研究されている。これらの空間は、例えば、それらの曲率条件を満たすリーマン多様体の列の極限空間として現れる。

## 2. 研究の目的

リッチ流や、曲率が上または下に有界な距離空間である CAT-空間や Alexandrov 空間などの幾何学的性質に関する理解を深めることが本研究の目的である。それによりリーマン幾何学への応用を目指す。

CAT-空間に関しては、CAT(0)-空間の研究において基本的な道具として使われている確率測度の重心の性質を CAT(1)-空間上の確率測度の  $p$  重心の性質に拡張し、応用を考える。

## 3. 研究の方法

リッチ流に関しては、G. Perelman ('02) が導入したエントロピーや L 幾何などの道具の他に、Alexandrov 空間やリッチ曲率が下に有界なリーマン多様体やその極限空間の理論を用いて調べる。

特に非コンパクト多様体上のリッチ流に関しては、一般に最大値原理が成り立たないことがあるため、解析的な手法だけでなく幾何学的手法も有効であると思われる。

CAT(1)-空間に関しては、これまでに半径の小さい完備な CAT(1)-空間上で確率測度の重心の一意存在を証明していた。CAT(1)-空間では、CAT(0)-空間のように距離関数が凸関数ではないため、CAT(0)-空間で成り立つことは CAT(1)-空間では成り立たないか、その一般化の証明は難しい。そこで、W. S. Kendall ('91) により調和写像の研究の中で発見された関数が一般の CAT(1)-空間で凸関数となることを証明し、その凸関数と I. Ekeland の変分原理を用いて、重心の一意存在を示した。本研究でも、この W. S. Kendall の凸関数を用いて CAT(1)-空間とその上の確率測度の  $p$  重心の新たな性質を調べる。

## 4. 研究成果

主に、半径の小さい完備な CAT(1)-空間上の確率測度の  $p$  重心に関する結果が得られた。

(1) 半径の小さい CAT(1)-空間上の確率測度の  $p$  重心の一意存在

以前の完備な CAT(1)-空間内の半径の小さい距離球上に集中した確率測度の重心に関する研究を拡張し、同じ状況で 1 以上の実数  $p$  に対して  $p$  重心の存在と、2 以上の実数  $p$  に対して  $p$  重心の一意性を証明した。CAT(1)-空間とは Alexandrov の意味で 1 以下の曲率を持つ距離空間のことである。距離空間上の確率測度の  $p$  重心は、その点からの距離の  $p$  上の積分で定義される関数の最小値を与える点のことである。重心は  $p=2$  の場合に対応し、この CAT(1)-空間上の確率測度の  $p$  重心の一意存在は、先に証明していた重心の一意存在の拡張である。

証明には、重心の一意存在の証明と同様に、W. S. Kendall ('91) の凸関数と I. Ekeland の変分原理を用いた。この  $p$  重心の存在と一意性は、重心の場合よりも更に非自明であったが、存在と一意性の議論を分けて考え、一意性については  $p=2$  の場合である重心の一意性に帰着させることで証明できた。 $p$ -重心の一意性に関して、 $p$  が 1 に十分近いときには 2 次元球面上で一意性が成り立たない反例が知られているが、 $p$  が 2 以上という仮定が最良かどうかは今のところ不明である。

## (2) 半径の小さい CAT(1)-空間上の確率測度の $p$ 重心の性質

半径の小さい完備な CAT(1)-空間上の確率測度の  $p$  重心の幾つかの性質を証明した。特に  $p$  が 1 以上の実数のときに、CAT(1)-空間上で  $p$  重心がその確率測度の全測度を持つ部分集合の閉凸包に含まれることを証明した。これも CAT(0)-空間上の確率測度の重心に対してよく知られた事実であるが、CAT(1)-空間では距離関数が凸関数でないことから明らかではなかった。この結果により、 $p$  重心の一意存在と合わせて、断面曲率が 1 以下の完備リーマン多様体上の確率測度の  $p$  重心に関する B. Afsari ('11) の定理が一般の CAT(1)-空間に拡張される。また応用として、半径の小さい完備な CAT(1)-空間上の確率測度と凸関数に対して Jensen の不等式が成り立つことを証明した。さらに、確率測度全体の空間であるワッサーシュタイン空間上で確率測度を動かした際の  $p$  重心の連続性などを証明した。

また、この  $p$  重心を用いて Banach - Saks 性の類似の性質を定式化し、その性質が任意の半径の小さい完備な CAT(1)-空間に対して成り立つことを証明した。これは、J. Jost ('94) が CAT(0)-空間上で重心を用いて定式化し証明していたものを CAT(1)-空間の  $p$ -重心を用いて定式化し拡張したものである。

## (3) 半径の小さい CAT(1)-空間上の確率測度の $p$ 重心を用いた大数の法則

半径の小さい完備な CAT(1)-空間に値を取る確率変数に対して、確率測度の  $p$  重心を用いて定式化される大数の法則を証明した。具体的には、半径の小さい完備な CAT(1)-空間に値を取る独立同分布に従う確率変数から帰納的に定義される平均値が、それらの確率変数から定まる確率測度の  $p$  重心に収束することを示した。これは完備な CAT(0)-空間や直径の小さい完備な CAT(1)-空間に値を取る確率変数に対して知られていた結果の拡張でもある。この大数の法則は  $p$  が 2 以上のときに成り立ち、 $p$  が 1 以上のときも、その確率変数から定まる確率測度の  $p$  重心の一意性を仮定すれば成り立つ。この結果も、CAT(1)-空間では距離関数が凸関数でないため CAT(0)-空間の場合よりも証明が難しいが、W. S. Kendall ('91) の凸関数を用いて証明した。

また、完備な CAT(0)-空間に値を取る確率変数に対する大数の法則に関して、K.-T. Sturm ('02) が確率変数に対して仮定してい

た 2 乗可積分の仮定を、その証明を改良し Kolmogorov の大数の法則を利用することで、1 乗可積分の仮定に弱めることができた。

## (4) 測度距離空間の集中の下での RCD 条件の安定性

小澤龍ノ介氏(大阪大学)との共同研究で、M. Gromov ('99) が導入したオプザーバブル距離と呼ばれる測度集中現象に由来する距離に関する測度距離空間の収束と、Ambrosio - Gigli - Savare ('14) が導入したリッチ曲率が下に有界であることの一般化であるリーマン的曲率次元 (RCD) 条件と呼ばれる曲率条件に関する結果を得た。具体的には、RCD 条件を満たす全測度 1 の測度距離空間の列が別の測度距離空間に集中した時に、その極限空間も RCD 条件を満たすことを証明した。測度距離空間の集中は、測度付きグロモフ - ハウスドルフ収束などの他の測度距離空間の収束よりも弱い収束であり、この結果は全測度が 1 の場合には既存の RCD 条件の安定性に関する結果の拡張でもある。

RCD 条件は、その空間上の確率測度全体の空間である Wasserstein 空間上の相対エントロピー関数の凸性と Cheeger エネルギーと呼ばれる汎関数の性質によって定義される。RCD 条件の安定性の証明では、Ambrosio - Gigli - Savare ('14) によって示された Cheeger エネルギーが双対エントロピーの勾配で表示されるという等式と、距離空間上の凸関数の理論、特に相対エントロピーの Moreau - 吉田近似とレゾルベント作用素が重要となった。また、一般の測度距離空間上の相対エントロピーのレゾルベントに関して、その一意存在と、確率測度を Wasserstein 空間上で動かした時の連続性の証明が書いてある文献が見つからなかったため、それらの証明も与えた。

## 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

T. Yokota,  
Convex functions and barycenter on CAT(1)-spaces of small radii,  
J. Math. Soc. Japan、査読有、68、No.3 (2016)、1297--1323.  
doi:10.2969/jmsj/06831297

T. Yokota,  
Complete ancient solutions to the Ricci flow with pinched curvature、

Comm. Anal. Geom., 査読有、25、No.2 (2017)、485--506.  
DOI:  
<http://dx.doi.org/10.4310/CAG.2017.v25.n2.a8>

T. Yokota,  
Convex functions and  $\mathbb{S}^p$ -barycenter on CAT(1)-spaces of small radii,  
Tsukuba J. Math., 査読有、41、No.1 (2017)、43--80.  
doi:10.21099/tkbjm/1506353559

T. Yokota,  
Law of large numbers in CAT(1)-spaces of small radii,  
Calc. Var. Partial Differential Equations, 査読有、57、No. 2 (2018)、57:35.  
DOI:<https://doi.org/10.1007/s00526-018-1310-5>

〔学会発表〕(計 19 件)

横田巧,  
リッチ流の曲率がピンチされた完備な古代解について  
「幾何セミナー」,  
2014 年 6 月、大阪大学

横田巧,  
リッチ流の曲率がピンチされた完備な古代解について  
「微分トポロジーセミナー」,  
2014 年 6 月、京都大学

横田巧,  
Complete ancient solutions to the Ricci flow with pinched curvature  
「幾何学セミナー」,  
2014 年 7 月、名古屋大学

横田巧,  
リッチ流の曲率がピンチされた完備な古代解について,  
「第 61 回幾何学シンポジウム(基調講演)」  
2014 年 8 月、名城大学

横田巧,  
勾配リッチソリトンの幾何学,  
「幾何学阿蘇研究集会」,  
2014 年 9 月、休暇村 南阿蘇

Takumi Yokota,  
Convex functions and barycenter on CAT(1)-spaces of small radii,  
「確率論と幾何学」,  
2014 年 9 月、東京工業大学

横田巧,

半径の小さい CAT(1)-空間上の確率測度の重心,  
「日本数学会 2014 年度秋期総合分科会」(幾何学分科会 特別講演)  
2014 年 9 月、広島大学

Takumi Yokota,  
Complete ancient solutions to the Ricci flow with pinched curvature,  
「低次元多様体モジュライ空間の幾何学」,  
2014 年 12 月、京都大学

横田巧,  
リッチ流の曲率がピンチされた完備な古代解について,  
「測地線及び関連する諸問題」,  
2015 年 1 月、熊本大学

横田巧,  
Convex functions and  $\mathbb{S}^p$ -barycenter on CAT(1)-spaces of small radii,  
「測地線及び関連する諸問題」,  
2016 年 1 月、熊本大学

Takumi Yokota,  
Convex functions and  $\mathbb{S}^p$ -barycenter on CAT(1)-spaces of small radii,  
「Metric Geometry and its Applications」,  
2016 年 2 月、復旦大学

横田巧,  
Open Problems on Ricci Flow,  
「Curvature flows and related problems」,  
2016 年 3 月、東京工業大学

横田巧,  
Convex functions and  $\mathbb{S}^p$ -barycenter on CAT(1)-spaces of small radii,  
「福岡大学微分幾何研究会」,  
2016 年 11 月、福岡大学セミナーハウス

横田巧,  
Law of large numbers on CAT(1)-spaces of small radii,  
「測地線及び関連する諸問題」,  
2017 年 1 月、熊本大学

横田巧,  
Law of large numbers in CAT(1)-spaces of small radii  
「リーマン幾何と幾何解析」,  
2017 年 2 月、京都大学

Takumi Yokota,  
Barycenter of probability measures on CAT(1)-spaces of small radii,  
「KTGU Mathematics Workshop for Young Researchers」,  
2017 年 2 月、京都大学

横田巧、  
Stability of RCD condition under  
concentration topology、  
「測地線及び関連する諸問題」、  
2018年1月、熊本大学

Takumi Yokota、  
Stability of RCD condition under  
concentration topology、  
「確率論と幾何学」、  
2018年1月、東北大学

横田巧、  
Stability of RCD condition under  
concentration topology  
「リーマン幾何と幾何解析」、  
2018年2月、筑波大学

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~takumi/y/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

横田巧 (YOKOTA, Takumi)  
京都大学・数理解析研究所・助教  
研究者番号：70583855