

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：24403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800037

研究課題名(和文) オペラッドを用いた埋め込みの空間の研究

研究課題名(英文) Study of embedding spaces using operads

研究代表者

森谷 駿二 (Moriya, Syunji)

大阪府立大学・理学(系)研究科(研究院)・客員研究員

研究者番号：40583464

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：余次元が高い結び目の空間とオペラッドの関係を研究した。3次元より高い空間の中の結び目はすべてほどけてしまうが、そのような結び目全体を集めた空間は多様な構造を持つ。一方、オペラッドとは代数構造を支配するものである。足し算や掛け算は2項演算であるが、オペラッドは3項演算や4項演算をもコントロールする。近年の驚くべき進展は結び目とオペラッドが密接に関係することが発見されたことである。筆者はこのような関係について、既存の結果を改善し、重要なオペラッドの例に対して予想に反する性質を証明した。

研究成果の概要(英文)：I studied the relationship between high codimensional long knots and operads. Operads control algebraic structures. I proved the odd dimensional framed little disks operads is not formal, which is not expected by many researchers.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：オペラッド

1. 研究開始当初の背景

Goodwillie の埋め込み解析や, Sinha の研究により, 埋め込みの空間とオペラッドとの関係が明らかになった. 余次元が 3 以上の long knot の空間に関しては, Lambrechts, Turchin, Volic の operad formality を使った研究により, この空間の有理ホモトピー不変量(コホモロジー群)は組み合わせ論的なグラフの情報から決定されることが知られていた. 類似の結果として, グラフホモロジーから結び目のコホモロジー群への写像は配置空間積分という幾何学的方法によって構成されていたが, この写像は trivalent graph のという一部で単射が知られていただけで, 他のグラフの所で単射なのかということや, 全射性については全く知られていなかった. これに比べて上記の Lambrechts らの結果は余次元が高い結び目の空間について完全な組み合わせ論的記述を与えたという意味でより強力な結果であると言える. Goodwillie の埋め込み解析はユークリッド空間の結び目だけでなく, より一般の(余次元が 3 以上の)多様体から多様体への空間についても適用可能である. 先に述べたユークリッド空間の中の結び目の場合以外の研究としては, Sinha が一般の多様体の中の結び目の空間に対して余単体モデルを構成している. また, de Brito-Weiss と Turchin が独立に埋め込みの空間が枠付き小球体オペラッド上の加群の間の射の空間と弱ホモトピー同値であることを埋め込み解析を使って証明した. これらは埋め込みの空間が関係する多様体の配置空間のある種の代数的なシステムから復元できることを意味しており, 一般の埋め込みの空間のホモトピー不変量を研究するための枠組みを与えている. ただ, 先に述べたユークリッド空間の中の結び目の場合以外, 具体的な不変量の計算に向けた研究というのは筆者の研究計画開始当初存在しなかった. その一つの理由としては, 枠付き小球体オペラッドに対しては formality という性質が知られていなかったことがある.

2. 研究の目的

本研究の目的は, 一般の埋め込みの空間のホモトピー不変量を研究することである. より具体的には de Brito-Weiss と Turchin の結果に現れる枠付き小球体オペラッドや, 加群について, それの formality の証明, ないしは代数的モデルの構成を行い, それとスペクトル系列を組み合わせることで有理係数でのホモトピー不変量の計算を行うことである.

3. 研究の方法

Goodwillie の埋め込み解析と Turchin, de Brito-Weiss の結果により, 埋め込みの空間は枠付き小球体オペラッド上の加群の間の写像空間として表される. このため, 埋め込みの空間を研究するためにはオペラッドを研究すればよいことになる. オペラッドに対しては, それに付随する余単体空間というも

のが存在する. 余単体モデルに totalization という操作を行うと別の空間が得られる. 通常余単体モデルはこの totalization によって得られる空間(この空間も totalization と呼ぶ)を研究するために用いられるもので, 余単体モデルを構成するそれぞれの空間は totalization よりも簡単な空間であり, この余単体モデルからスペクトル系列が得られ, それを用いて totalization のコホモロジー群などを計算することができる. オペラッド余単体モデル totalization という手順によって, オペラッドに対して別の空間を得ることができる. この空間はよく知られた空間であることが多く, これを使ってオペラッドを研究することができる. 筆者は枠付き小球体オペラッドや枠付き choose-two オペラッドに対してこの totalization やスペクトル系列を用いてこれらのオペラッドを研究した. もう一つの研究のための道具はモデル圏である. モデル圏とは Quillen によって 1970 年頃導入された概念で, 様々な対象に対してホモトピー論を行うための概念である. 例えば, 微分次数付き代数の圏にはモデル圏の構造が入る. オペラッドの圏にもモデル圏の構造が入り, これを使えばオペラッドを弱い同値関係にある別の, より性質の良いオペラッドに置き換えることができる. 筆者はこの概念を使ってオペラッドを研究した.

4. 研究成果

主な結果は二つある. 一つ目は, 上の背景で述べた Lambrechts, Turchin, Volic の余次元が高いユークリッド空間の中の結び目の空間のコホモロジー群がグラフ複体によって完全に決定されるという結果を operad のモデル圏を用いてより見通しよく簡潔に証明し, さらにより強い結果を証明したことである. Lambrechts らの証明の中で鍵となっているのは小球体オペラッドの「formality」という性質である. 彼らの証明には技術的に複雑な部分がある. 彼らの論文の中でもし, 「multiplicative formality」という性質が成り立てば, 証明はずっと簡略化されるだろうと予想している. 筆者は実際にここで述べられている multiplicative formality を証明した. この証明の中で, オペラッドのモデル圏を用いてオペラッドの図式を取り換えるという革新的な方法を用いた. また, multiplicative formality の応用として, 結び目の空間に入る Gerstenhaber 代数構造と呼ばれる構造のグラフによる記述を得た. この構造は二つの結び目をつなぐ操作(連結和)と一つの結び目をもう一つの結び目の中を通過させる操作から定義される次数付き可換な積と次数付きの Lie 代数からなり, Poisson 構造に類似の関係式を満たす. この構造は境による結び目の空間の非自明なコサイクルの発見でも使われおり, 幾何学的に適用性のあるものである. 筆者の結果はこの構造の組み合わせ論的な記述を与えるもの

であり、これを動機として、Willwacher はグラフ複体の Gerstenhaber 代数構造の組み合わせ論的な研究を行っている。また、Sinha によって構成された、結び目の空間と関係深いスペクトル系列が退化することを余次元が 2 の場合に証明した。これは Lambrechts らが余次元 3 以上の場合に証明していたことの拡張である。これらの結果を論文にまとめ、査読付き論文誌である Kyoto Journal of Mathematics より出版した。もう一つの結果は、奇数次元の枠付き小球体オペラッドに対して、formality が成り立たないという特筆すべき性質を証明したことである。研究の背景の所でも述べたように、枠付き小球体オペラッドは一般の埋め込みの空間を研究するうえで非常に重要かつ根本的な役割を果たす。多くの研究者はこのオペラッドが通常的小球体オペラッド同様、formal であろうと予想していた。しかし筆者は枠付き結び目と通常の結び目の関係から、奇数次元の場合には formal ではないという予想を立て、余単体モデルや Massey 積を用いてその予想を証明した。

この結果を論文にまとめ、査読付き論文誌「International Mathematical Research Notice」に投稿したところ、アクセプトされた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. Syunji Moriya, 「Non-formality of the odd dimensional little balls operads」, 『International Mathematics Research Notices』, Oxford University Press (2017 年 7 月電子的に発行、査読有)。

2. Syunji Moriya, 「Multiplicative formality of operads and Sinha 's spectral sequence for long knots」 『Kyoto Journal of Mathematics』, Duke University Press, 55, no.1, 17-27, (2015) (査読有)。

[学会発表](計 6 件)

1. 森谷駿二 「Non formality of the odd dimensional framed little disks operads」, 『千葉大学幾何学セミナー』, 千葉大学, 2017 年 11 月。

2. 森谷駿二 「The space of knots in a manifold and an A-infinity-right module of configuration spaces」 『空間の代数的・幾何学的モデルとその周辺』, 信州大学, 2017 年 9 月(論文は執筆中)。

3. 森谷駿二 「The space of short ropes and

the classifying space of the space of long knots」,

『日本数学会 2017 年度年会』, 15 分講演, 首都大学東京, 2017 年 3 月(信州大学 境圭一氏と連名での発表)。

4. 森谷駿二 「The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots」,

『Topology Seminar』, Kansas State University, February, 2017.

5. 森谷駿二, 境圭一 「The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots」,

『福岡ホモトピー論セミナー』, 福岡大学セミナーハウス, 2017 年 1 月。

6. 森谷駿二 「Non-formality of odd dimensional framed little balls operads」,

『信州トポロジーセミナー』, 信州大学, 2014 年 12 月。

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者 森谷 駿二 (MORIYA.Syunji)
(大阪府立大学・理学系研究科・客員研究員)

研究者番号: 40583464

(2) 研究分担者 なし

()

研究者番号:

(3)連携研究者 なし
()

研究者番号 :

(4)研究協力者 なし
()