

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成30年 5月14日現在

機関番号：32642

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800044

研究課題名(和文) 曲面上の曲線の交差に着目した写像類群の研究

研究課題名(英文) Study of the mapping class group using the intersections of curves on surfaces

研究代表者

久野 雄介 (Kuno, Yusuke)

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号：80632760

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：曲面上の曲線の自己交差を測る演算であるテュラエフ余括弧積について研究した。特に、リー理論における柏原-ヴェルニュ問題とテュラエフ余括弧積の関係を明らかにした。その結果、テュラエフ余括弧積の形式性が証明され、写像類群のジョンソン準同型の理論への応用が得られた。一般デーンツイストと呼ばれる、曲面上の自己交差を持ちうる閉曲線に対するある代数的構成について研究した。特に、一般デーンツイストの幾何学的解釈を得ることを試み、あるホモロジーシリンダーが第一次近となるという結果を得た。

研究成果の概要(英文)：The main object of this research project was the Turaev cobracket which is a topological operation measuring the self-intersections of curves on surfaces. In particular, we studied the relationship between the Kashiwara-Vergne problem in Lie theory and the Turaev cobracket. As a result, we established the formality property of the Turaev cobracket and obtained its application to the theory of the Johnson homomorphisms. We also studied generalized Dehn twists, which is a certain algebraic construction associated to any closed curves on surfaces. In particular, we tried to clarify a geometric interpretation of generalized Dehn twists and partially succeeded in the sense that we obtained a first approximation of them in terms of homology cylinders.

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 ゴールドマン括弧積 テュラエフ余括弧積 ジョンソン準同型

1. 研究開始当初の背景

曲面の写像類群は低次元トポロジーにおいて重要な離散群である。写像類群は曲面上の曲線の集合へ自然に作用する。この事実は写像類群を代数的に記述するための有効な手段を与えてきた。

こうした中、2010年に始まる、河澄響矢氏(東京大学)と代表者の共同研究において、ゴールドマン・チュラエフ Lie 双代数を用いた写像類群の研究へのアプローチが始まった。曲面上の曲線の交差や自己交差を用いて定義される Lie 括弧積と Lie 余括弧積が考察の中心となる。Lie 括弧積についてはその簡明な表示が得られること(ゴールドマン括弧積の形式性)が河澄氏と代表者の共同研究により判明していた。残された中心的課題は、チュラエフ余括弧積と呼ばれる、Lie 余括弧積の構造の解明であった。

2. 研究の目的

写像類群の研究では、単純閉曲線を利用する議論が有効であることが多い。本研究では、上に述べたチュラエフ余括弧積の構造の解明を中心に、単純とは限らない閉曲線とその自己交差に積極的に着目することで、写像類群の新たな知見を得ることを目指した。

3. 研究の方法

(1) 河澄響矢氏と研究協力を行い、チュラエフ余括弧積の簡明なテンソル表示を求めること(チュラエフ余括弧積の形式性問題)について研究した。当初は計算機実験により研究の方向性を探る作業が中心であったが、平成27年度の秋から、ジュネーブ大学の A. アレクシーフ教授、大学院生の F. ネフ氏との共同研究が始まり、発展した。曲面の種数が0の場合にリー理論における柏原・ヴェルニュ問題を用いてチュラエフ余括弧積の形式性問題を解くこと、また、柏原・ヴェルニュ問題を高種数の曲面に一般化することについて研究を行った。

(2) G. マシュヨー氏(ストラスブール大学/ブルゴーニュ大学)と研究協力を行い、一般デーンツイストと呼ばれる、曲面上の自己交差を持ちうる閉曲線に対するある代数的構成について、幾何学的解釈を得ることについて研究を行った。

上記(1)(2)においては、写像類群のジョンソン準同型の理論との関連・およびこの理論への応用を常に念頭におきながら研究を進めた。

4. 研究成果

(1) チュラエフ余括弧積の形式性問題について。上に述べた、河澄氏、アレクシーフ教授、ネフ氏との共同研究の結果、チュラエフ余括弧積と柏原-ヴェルニュ問題との関係について大きな進展を得た。まず、種数0の曲面については、柏原-ヴェルニュ問題の解を用

いると、チュラエフ余括弧積の形式性、つまり、それがシェドラーの余括弧積に一致するということが証明された。また、柏原-ヴェルニュ問題の二番目の条件(ある種のコバウンダリー条件)についての位相幾何学的な解釈が得られた。次に、この結果をふまえ、高種数の曲面に対する柏原-ヴェルニュ問題の定式化を行った。この問題の解を用いると高種数の曲面上のチュラエフ余括弧積の形式性が示されること、この問題に解が存在することを示した。また、高種数の場合の柏原-ヴェルニュ問題の解全体の構造を明らかにした。高種数の曲面上では、曲面上のフレイミングの存在、柏原-ヴェルニュ問題の二番目の条件に種数が寄与する項があることが見いだされ、種数0とは異なる様相も明らかになった。また、チュラエフ余括弧積の形式性を、写像類群のジョンソン準同型の理論に関して応用した。具体的には、榎本・佐藤トレースと呼ばれるジョンソン準同型の像についての制約の位相幾何学的な解釈を与えた。

以上の結果により、チュラエフ余括弧積の形式性問題については一つの決着を付けることができたといえる。結果の概要について論文に発表し、種数0の場合の結果については論文に発表した。高種数の場合の結果についてはプレプリント"Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno and Florian Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, arXiv:1804.09566 (2018)"にまとめた。

(2) マシュヨー氏との共同研究の結果、ホモロジーシリンダーと呼ばれる3次元多様体論におけるある構成により、一般デーンツイストのしかるべき意味での第一次近似が得られた。具体的には、ジョンソン準同型を用いて両者を定量的に比較し、値が一致することを示した。結果は論文にまとめている途中である。

(3) その他の結果。3価ファットグラフスパインの、曲面のホモロジー群に値を持つ不変量について研究した。これはある種の二次不変量であり、タイヒミュラー空間の組合せ構造に関係している。結果は論文に発表した。福原真二氏(津田塾大学)との研究協力により、カウフマン括弧積を用いて曲面上の曲線の自己交点数を評価する研究を行った。結果は論文に発表した。福原氏、河澄氏との研究協力により、曲面上の曲線の自己交差に着目するトポロジーからのアイデアを用いて、ベルヌーイ数を二項係数により表す公式を得た。結果は論文に発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Shinji Fukuhara, Nariya Kawazumi and

Yusuke Kuno, Generalized Kronecker formula for Bernoulli numbers and self-intersections of curves on a surface, Osaka Journal of Mathematics に掲載決定, 査読あり

Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Florian Naef and Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, Advances in Mathematics **326**, 1–53 (2018),

doi:10.1016/j.aim.2017.12.005

Shinji Fukuhara and Yusuke Kuno, Kauffman-Jones polynomial of a curve on a surface, Journal of Knot Theory and its Applications **26**, 1750062 (17 pages)(2017),

doi:10.1142/S0218216517500626

Yusuke Kuno, A homology valued invariant for trivalent fatgraph spines, Algebraic & Geometric Topology **17**, 1785-1811 (2017) DOI: 10.2140/agt.2017.17.1785

Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Florian Naef and Yusuke Kuno, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **355**, 123-127 (2017)

doi:10.1016/j.crma.2016.12.007

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, Annales de l'Institut Fourier **65**, 2711-2762 (2015) doi: 10.5802/aif.3001

[学会発表](計 22 件)

Yusuke Kuno, Formality of the Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem, Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds, 奈良女子大学, 2017 年 10 月 27 日

Yusuke Kuno, Turaev 余括弧積の形式性と柏原-Vergne 問題, 幾何学コロキウム, 北海道大学大学院理学研究院数学部門, 2017 年 10 月 20 日

Yusuke Kuno, Kauffman-Jones polynomial of a curve on a surface, リーマン面に関連する位相幾何学 2017, 東京大学大学院数理科学研究科, 2017 年 9 月 5 日

Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem, Tsuda University Topology Workshop, 津田塾大学小平キャンパス, 2017 年 7 月 27 日

Yusuke Kuno, Formality of the Goldman-Turaev Lie bialgebra and the

Kashiwara-Vergne problem in positive genus, トポロジー火曜セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科, 2017 年 4 月 25 日

Yusuke Kuno, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, Geometry and Topology seminar, University of Luxembourg, Luxembourg, 2016 年 12 月 5 日

Yusuke Kuno, 1-cocycles on the fatgraph complex, Seminaire Groupes de Lie et espaces des modules, Universite de Geneve, Switzerland, 2016 年 10 月 25 日

Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, Seminaire de Topologie, Institut Fourier, Universite Grenoble Alpes, France, 2016 年 9 月 16 日

Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, GRT, MZVs and associators, Les Diablerets, Switzerland, 2016 年 8 月 28 日

Yusuke Kuno, The Kashiwara-Vergne problem and the Goldman-Turaev Lie bialgebra II, Workshop on Grothendieck-Teichmüller theories, Chern Institute of Mathematics, Nankai University (China), 2016 年 7 月 28 日

Yusuke Kuno, The Turaev cobracket for genus 0 and the Kashiwara-Vergne problem, Seminaire GT3, IRMA, University of Strasbourg (France), 2016 年 5 月 30 日

Yusuke Kuno, The Turaev cobracket for genus 0 and the Kashiwara-Vergne problem, Seminar Georges Reeb, LMIA Universite Haute-Alsace (France), 2016 年 5 月 19 日

Yusuke Kuno, On algebraic description of the Goldman-Turaev Lie bialgebra, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2016, 広島大学理学部, 2016 年 3 月 7 日

Yusuke Kuno, 1-cocycles on the fatgraph complex, トポロジーセミナー, 東京工業大学大学院理工学研究科, 2016 年 1 月 6 日

Yusuke Kuno, 1-cocycles on the fatgraph complex, 信州トポロジーセミナー, 信州大学理学部, 2015 年 12 月 16 日

Yusuke Kuno, A homology valued invariant for trivalent fatgraph spines, MCM2015(autumn):Moduli Space, Conformal Field Theory and Matrix Models, 東京大学数理科学研究科, 2015

年 10 月 30 日

Yusuke Kuno, ベルヌーイ数と曲線の自己交叉, 理学セミナー, 日本女子大学, 2015 年 10 月 9 日

Yusuke Kuno, Symplectic expansions and mapping class groups, GRT, MZVs and associators, Les Diablerets, Switzerland, 2015 年 8 月 21 日

Yusuke Kuno, A homology valued invariant for trivalent fatgraph spines, 離散群と双曲空間の幾何と解析, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 6 月 22 日

Yusuke Kuno, A homology valued invariant for trivalent fatgraph spines, French-Japanese workshop on Teichmüller spaces and surface mapping class groups, IRMA, University of Strasbourg (France), 2015 年 6 月 4 日

- 21 Yusuke Kuno, Fatgraph complexes and mapping class groups, 日本数学会トポロジー分科会特別講演, 明治大学, 2015 年 3 月 23 日

- 22 Yusuke Kuno, Morita-Penner construction and the Earle class, Mapping class groups of surfaces and automorphism groups of free groups, IRMA, University of Strasbourg (France), 2014 年 9 月 10 日

〔図書〕(計 2 件)

Yusuke Kuno, Meyer functions and the signatures of fibered 4-manifolds, Handbook of Teichmüller theory, ed. A. Papadopoulos, Volume V, EMS Publishing House, Zurich, 75-96 (2016) (分担執筆)
Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, Handbook of Teichmüller theory, ed. A. Papadopoulos, Volume V, EMS Publishing House, Zurich, 97-165 (2016) (分担執筆)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

久野 雄介 (KUNO, Yusuke)

津田塾大学・学芸学部数学科・准教授

研究者番号 : 80632760