2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１１５０１

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：２６８０００４９

研究課題名（和文）代数的差分方程式の既約性と解の超超越性の研究

研究課題名（英文）Study on irreducibility of algebraic difference equations and differential transcendence of solutions

研究代表者

西岡　斉治（Nishioka, Seiji）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：１０６３２２２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：関数が代数的微分方程式をみたさないとき、超超越的であるという。差分方程式をみたす関数の超超越性はヘルダーによるガンマ関数の研究をはじめとして様々ある。ティーツェは１９０５年の論文で差分リッカチ方程式の解の超超越性を調べ、十分条件を得た。本研究ではティーツェの結果とその証明を完全に代数化し、さらにｑ差分やマーラ型方程式を含む一般の差分にまで拡張した。具体例として、エアリー方程式のｑ差分版であるｑエアリー方程式に対して、ｑが１のベキ根でないときに解が超超越的であることを証明した。また、ｑパンルヴェ方程式の既約性を証明する理論や手法はｄパンルヴェ方程式にも適用可能であることを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We say that a function is differentially transcendental when it does not satisfy any algebraic differential equation. There are various studies on differential transcendence of functions satisfying difference equations. O. Hoelder's study on Gamma function is typical. In 1905, H. Tietze studied differential transcendence of solutions of difference Riccati equations, and obtained a sufficient condition. In this study, H. Tietze's result is made purely algebraic, and applicable to difference Riccati equations with other transforming operators such as one of q-difference, Mahler type, etc. As an application, it is seen that a solution of q-Airy equation is differentially transcendental when q is not a root of unity. The theory and the method for proving irreducibility of q-Painleve euqations are found to be applicable to a d-Painleve equation.

研究分野：差分代数

キーワード：差分方程式　差分代数　既約性　超超越性　差分リッカチ方程式

１．研究開始当初の背景

（１）差分方程式の既約性

微分方程式で定義される新しい超越関数を発見すること。１９世紀末、これを目的としてパンルヴェ（常微分）方程式が定義された。ここでいう新しい関数とは、線形常微分方程式の解やアーベル関数で表示できない関数のことである。また、それらで表示できる関数は梅村の古典関数と呼ばれる。パンルヴェ方程式は２階非線形代数的微分方程式で、６つの型に分類される。それらが実際に新しい関数を定義することが証明されたのは、２０世紀末になってからのことであった。パンルヴェ方程式の既約性と呼ばれる問題である。この問題は１９８８年の西岡啓二によるパンルヴェⅠ型方程式の既約性の証明を皮切りに、梅村、岡本、野海、渡辺、その他多くの研究者の努力の末、２１世紀に入りようやく完全に解決した。なお、問題の定式化には微分代数が用いられた。

一方、１９９０年代、グラマティコス、ラマニ等によりパンルヴェ方程式の離散版が相次いで提示された。離散パンルヴェ方程式と呼ばれる差分方程式群である。その後、２００１年に坂井により幾何的観点から離散パンルヴェ方程式の分類がなされた。遡って、１９８８年、同氏により離散パンルヴェ方程式の既約性の問題が提示されている。報告者は２００９年発表の論文で、差分代数を用いることでこの問題の定式化を初めて行い、申請当時までに２１種のうち４種の離散パンルヴェ方程式の既約性を証明していた。ただし、その４種はいずれもｑパンルヴェ方程式と呼ばれるグループ（１１種）に属す方程式であり、もう一つの大きなグループであるｄパンルヴェ方程式群（９種）の既約性は手付かずのままであった。

（２）差分方程式の解の超超越性

ヘルダーのガンマ関数の超超越性の研究（１８８７年）に代表されるように、差分方程式の解が代数的微分方程式をみたすか、という問題がある。この問題は古くから研究されているが、近年新たな理論がハルドゥインとシンガーにより構築された。しかし、彼らの理論は線形差分方程式のガロワ理論であるため、非線形差分方程式に応用できず、また対象が有理型関数解であるなど、構築手法による制約がある。

２．研究の目的

（１）差分方程式の既約性

６種のパンルヴェ常微分方程式の既約性は一つ一つ地道に証明された。離散パンルヴェエ方程式の場合も同様にせざるを得ないとすると、数が多いので困難な作業となる。本研究では、離散パンルヴェ方程式の形が一部の複雑なものを除き３つのパターンに分けられることに着目する。３つのパターンのうち２つはｑパンルヴェ方程式に現れないため、ｑパンルヴェ方程式以外の離散パンルヴェ方程式の既約性を証明するための汎用的な補題を作り、証明手法の体系化を目指す。特にｄパンルヴェ方程式の既約性を実際に証明する。

（２）差分方程式の解の超超越性

将来的には離散パンルヴェ方程式の解の超超越性を研究したいが、まだ非線形というだけで道具に困る状況である。離散パンルヴェ方程式は２階の方程式であるが、まずは１階の方程式を対象として理論構築を図る。具体的には差分リッカチ方程式の解の超超越性を研究する。差分リッカチ方程式とは、y(x+1)がy(x)の１次分数変換の形でかかれる方程式である。ただし、本研究ではy(x+1)の代わりにｑ差分の y(qx)やマーラー型の y(x^d)であるようなものも想定している。ここでｑは１のベキ根でなく０でない複素数であり、ｄは２以上の自然数である。

ハルドゥインとシンガーによる線形差分方程式の解の超超越性の理論は、線形差分方程式のガロワ理論にもとづく理論であり、それゆえの制約があると考えられる。したがって、得られている結果を別の手法により捉えなおす試みを通して、解に対する制約を取り除いたり、非線形に応用可能な結果や手法を得られると期待する。

（３）他分野への応用

本研究では差分の変換作用素に対する制約がゆるく、それゆえに通常の差分に加えてｑ差分方程式だけでなくマーラー型方程式も統一的に扱うことができる。マーラー型方程式は超越数論に現れる方程式であり、f(x),f(x^d),f(x^d^2),…で記述されるものである。解の超越性がわかると、その解の代数的数における値が超越数であるかどうかがわかるのが通例である。報告者は２０１２年の論文で差分代数における可解性に関する結果がマーラー型方程式に応用可能であることを明らかにした。差分代数の既存の結果や本研究で得られる結果の中にも応用可能なものはあると思われる。

３．研究の方法

（１）本研究の目的を達成するためには、１００年以上前の文献から最新の研究まで、幅広く文献や情報を収集する必要がある。文献に関しては山形大学ではほとんど入手できないため、他大学において収集する。また、既約性も解の超超越性も差分ガロワ理論と関係しているため、関連する研究集会に参加し、資料収集を行う。ｄパンルヴェ方程式の既約性を証明する上では、離散パンルヴェ方程式の専門的知識が必要であるため、専門家と研究打ち合わせを行う。

（２）差分方程式の既約性

ｄパンルヴェ方程式を１つ選定し、その既約

性を証明する中で、既存の補題の修正を行う。ｄパンルヴェ方程式の形は、すでに既約性を確かめてきたｑパンルヴェ方程式の形とは異なり、計算過程での議論にも違いが現れることが懸念されていた。実際に何が問題となるかは具体例を計算して発見する。

（３）差分方程式の解の超超越性
具体的には、差分リッカチ方程式の解の超超越性を研究する。ここで差分の変換作用素は通常の差分だけでなくｑ差分やマーラー型を想定している。通常の差分の場合にティーツェによる先行研究があるので、それを上記３例を含む一般の変換作用素に対するものにまで拡張する。

４．研究成果
（１）ｑベッセル方程式の非可解性に関する結果を得た。ｑベッセル方程式は古典的な微分方程式の一つであるベッセル方程式のｑ差分版である。この方程式の解が有理関数を用いて、四則演算や１階線形差分方程式の解を取ることを有限回繰り返しても得られないことを示した。ただし、ｑは超越数であると仮定した。証明にはリッカチ型差分方程式に対する付値環型拡大による一般論を用いた。付値環型拡大とはフランケによるリューヴィル型の拡大を包含するような差分体の拡大の一種である。ここで、差分体とは体に変換作用素(単射自己準同型写像)を付加したもので、変換作用素は本質的に全射であると仮定されることが多い。今回、既存の一般論を全射とは限らない変換作用素に通用するものに拡張した。(雑誌論文３)

（２）差分代数の結果を超越数論に応用する研究も行った。より具体的には、マーラー関数の値の超越性についての結果を得た。この研究において、マーラー関数は定数係数有理的差分方程式をみたすものとした。マーラー関数の値の超越性はマーラー関数の超越性を示すことで得られる。一般に関数の超越性を証明することは容易ではないが、既存の結果である、複数の有理的差分方程式の有理式部分の次数を比較することで、それぞれの解の代数的独立性を判定する手法を用いると、ある程度一般的にマーラー関数の超越性を示すことができた。(雑誌論文４)

（３）関数が代数的微分方程式をみたさないとき、超超越的であるという。差分方程式をみたす関数の超超越性はヘルダーによるガンマ関数の研究をはじめとして様々ある。近年は差分ガロワ理論による研究が活発であり、2 階線型差分方程式の具体例もいくつか見つかっている。ここでの差分は通常の差分 f(x)->f(x+1)だけでなくｑ差分 f(t)->f(qt)とマーラー型 f(x)->f(x^d)を含む。ただしｄは２以上の自然数である。一方、ティーツェは１９０５年の論文で差分リッカチ方程式の解の超超越性を調べ、標準形に現れる係数の極限が０という十分条件を得た。

本研究ではティーツェの結果とその証明を完全に代数化し、さらに差分作用素をｑ差分やマーラー型を含む一般のものに拡張した場合の結果を得た。ティーツェの証明から示唆されていたことであるが、差分リッカチ方程式が代数的微分方程式をみたす解をもつことと、差分リッカチ方程式の係数から定まる３階線型差分方程式が有理関数解をもつこととが強く関連する。なお、代数化に際しては極限を付値により解釈した。通常の差分における有理関数に対しては、無限遠点における級数展開の位数をみていることになる。

具体例として、エアリー方程式のｑ差分版であるｑエアリー方程式に対して、ｑが１のベキ根でないとき解が超超越的であることを証明した。ｑエアリー方程式は２階線型ｑ差分方程式であり、２階線型微分方程式の場合と同様の方法で差分リッカチ方程式に変形される。

以上の内容を論文にまとめ、現在投稿中である。

（４）ｑエアリー方程式の解とｑベッセル方程式の解の超越性はともにｑが超越的である場合に示されていた。より正確にはリッカチ化された形を反復して得られる差分方程式すべてに対して、ｑが超越数のときに解の超越性が得られていた。本研究では条件を緩和してｑが１のベキ根でない場合に解の超越性を証明した。これにより成果（１）の結果はｑが１のベキ根でない場合に拡張される。また成果（３）もこの結果をふまえてなされたものである。(雑誌論文２)

（５）パンルヴェ常微分方程式の離散版の一つである$D_7^{(1)}$型ｄパンルヴェ方程式の既約性については、本研究開始直前に一定の結果を得ていた。本研究において証明を精査したところ、既存の理論と手法には十分に汎用性があることが明らかとなった。

そもそも離散パンルヴェ方程式の既約性の問題は、差分体の分解可能拡大に一般的な解が入りえないこととして定式化していた。その際、差分体には本質的には可逆性を要請するような条件が課されていたが、その条件をなくすことができたため、分解可能拡大の定義は差分体を選ばないものになった。また、パンルヴェ常微分方程式の既約性証明でしばしば言及されるインヴァリアント・ディヴァイザーは、既に示唆されていたように、超越次数が１であることを微分特有の状況によりかみ砕いて表現したものといえる。実際、$D_7^{(1)}$型ｄパンルヴェ方程式に対してもインヴァリアント・ディヴァイザーに対応するものを導入する必要はなく、超越次数が１であることから既存の証明手続きに沿って議論を展開することができた。

以上の内容は専門誌「Funkcialaj

Ekvacioj」上での掲載が決定している。(雑誌論文１)

５．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計４件)

1. Nishioka, S., Irreducibility of discrete Painlevé equation of type D7 (1), To appear in Funkcialaj Ekvacioj.
2. Nishioka, S., Transcendence of solutions of q-Airy equation, Josai Mathematical Monographs, Vol. 10 (2017), 129--137.
3. Nishioka, S., Proof of unsolvability of q-Bessel equation using valuations, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, Vol. 23 (2016), No. 4, Page 763--789.
4. Nishioka, K., Nishioka, S., Autonomous equations of Mahler type and transcendence, Tsukuba Journal of Mathematics, Vol. 39, No. 2 (2015), 251--257.

〔学会発表〕(計８件)

1. 可積分系ウィンターセミナー2018, KKR 水上水明荘, 群馬県「差分リッカチ方程式の解の超超越性」, 2018 年 2 月 3 日
2. 非線形波動研究の新潮流 ―理論とその応用―, 九州大学応用力学研究所, 福岡県「q-Airy 方程式の解の超超越性」, 2017 年 11 月 9 日
3. 表現論と微分方程式, 城西大学, 東京都「反復差分リッカチ方程式の解の超越性」, 2016 年 11 月 27 日
4. SIDE 12, Quebec, Canada「Irreducibility of difference Painleve equations」, 2016 年 7 月 3 日～9 日
5. Differential and Difference Equations: Analytic, Arithmetic and Galoisian Approaches, Lille (Laboratoire Paul Painlevé), France「Double-angle formulae and algebraic independence」, 2015 年 10 月 20 日
6. Model Theory, Difference/Differential Equations and Applications, CIRM, France「Double-Angle Formulae and Algebraic Independence」, 2015 年 4 月 8 日
7. Recent developments in differential equations in the complex domain, RIMS, Kyoto University, Japan「Reducibility of algebraic difference equations」, 2014 年 11 月 18 日
8. 2014 函数方程式論サマーセミナー, KKR 伊豆長岡保養所「千歳荘」, 静岡県「超越古典関数がないこと（既約性）」, 2014 年 8 月 5 日

〔図書〕(計０件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://sci.kj.yamagata-u.ac.jp/~nishioka/

６．研究組織
(1)研究代表者
西岡　斉治（NISHIOKA Seiji）
山形大学・理学部・准教授
研究者番号：１０６３２２２６

(2)研究分担者

(3)連携研究者

(4)研究協力者