様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００５１

研究課題名（和文）個体間に強い相互作用を持つ分枝過程の解析

研究課題名（英文）Analysis of branching process with interacting particle systems

研究代表者
中島　誠（Nakashima, Makoto）

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：６０６３５９０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：ランダム環境中の分枝ランダムウォークの総個体数の対数の長時間挙動はランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーでコントロールされる．
研究期間全体を通じてこの自由エネルギーの挙動について空間次元が1,2次元の場合の挙動の評価を行った．
さらに高次元の場合に注目してランダム媒質中のディレクティドポリマーの臨界点を調べるためにランダムウォークピニング模型の解析も行った．この研究ではランダムウォークピニング模型に存在する2種の相転移の臨界点が一致することを証明し，特に3次元以上の場合には劣臨界的な相では中心極限定理および普遍原理が成立することが証明された．

研究成果の概要（英文）：Asymptotics of logarithms of the total number of branching random walks in random environment are controlled by the free energy of directed polymers in random environment.
We gave estimates of free energies for directed polymers in random environment in 1 and 2 dimensions.
Also, we study the random walk pinning model to analyze the critical points of directed polymers in random environment in higher dimension. We found that two critical points coincide with each other and we proved the central limit theorem and invariance principle in the subcritical phase for dimension d\geq 3.

研究分野：確率論

キーワード：統計力学　ディレクティドポリマー　相転移　臨界点　ピニング模型　分枝ランダムウォーク

１．研究開始当初の背景

分枝過程とは生物の個体数の成長を確率論的に表現したものである。現在では数理生物学や原子炉内の中性子の伝播などを記述するものとしても使われている。
分枝過程の研究は古くからされているが、この模型は生成分布と呼ばれる確率分布を使って記述される。生成分布とはひとつの個体が生み出す個体の数を表す分布である。
特に分枝過程の一つの研究対象として「個体が絶滅する」というものがあり、これに関してはすでに詳しく知られている。最も単純な模型である Galton-Watson 過程では、一つの個体が生み出す個体数の期待値 m が 1 以下のとき確実に絶滅し、1 より大きいとき絶滅しない確率が正である。これにより臨界値は m = 1 であることがわかる。Galton-Watson 過程の臨界点近傍の解析は古くから行われており 1960 年代に渡辺信三氏らにより導入されたスーパーブラウン運動(Dawson-渡辺超過程) と呼ばれる測度値確率過程は現在でも多くの研究者の興味の対象となっている。
この過程は分枝過程の極限として現れるだけでなく、統計力学の「ある種」の分枝構造を持つ模型の臨界点近傍の極限としても現れることがある。たとえば感染モデルの一種であるコンタクトプロセスや浸透過程の臨界点近傍における極限過程として現れる。このように分枝過程は統計力学においても重要な位置づけとなっていることがわかる。

２．研究の目的

本研究の目的は統計力学や数理生物学などに現れる確率模型である分枝過程に関する解析を行うことである。特に個体間に強い相互作用を持つ『(A) ランダム環境中の分枝ランダムウォーク』および『(B) 多種分枝ランダムウォーク』といった 2 つの確率模型の解析を行う。これらの確率模型は気候の変動などにより出生率が変化する生物群や互いに触媒として作用しあう粒子など現実に観測される事象を数学的に記述している。こういった点で本研究は確率論だけでなく物理学や数理生物学などへの応用も期待されている。

３．研究の方法

相互作用を持つような分枝過程の解析を行う。具体的な計画の要旨は以下のようになる。
A: ランダム環境中の分枝ランダムウォークに関する研究
(A-i) 1 次元空間の場合に”個体が絶滅しない"と条件付けたときの個体の挙動の解析
(A-ii) 2 次元空間におけるランダム環境中のスーパーブラウン運動の構成。
B: 相互作用を持つ多種分枝ランダムウォークに関する研究
(B-i) 2 種個体間の密度関数の台の連結成分の解析。
(B-ii) 3 次元空間への拡張の可能性の考察。

４．研究成果

ランダム環境中の分枝ランダムウォークについて研究する際には、環境を固定した状態で期待値を考えた確率模型を考えることが有用なことが多いことを踏まえ、まずはこの環境を固定した状態で期待値を考えた確率模型について研究することにした。
この模型はランダム媒質中のディレクティドポリマーと呼ばれる確率模型で近年 KPZ 方程式との関連で注目を浴びている。そこでこのランダム媒質中のディレクティドポリマーの研究から始めることにした。
研究方法（A-ii）の問題を考えるため２次元のランダム媒質中のディレクティドポリマーについて研究を始めた。１次元のランダム環境中のスーパーブラウン運動を構成する際には時刻nに対して空間をn^{-1/2}倍しランダム環境を n^{-1/4}倍というスケーリングを行うことでランダム環境の影響を弱めることで非自明な弱収束極限が得られるということを示していた。2 次元ランダム媒質中のディレクティドポリマーの研究では２次元のランダム環境中のスーパーブラウン運動を構成するために必要になるであろうランダム環境に対するスケーリンングの予想を与えるために行った。その結果、ランダム環境に対するスケーリングはおおよそ 1/√log n が適当であると結論づけることになった。そこで実際にこのスケーリングを用いたランダム環境中の分枝ランダムウォークの極限過程を構成することを試みたところ、固定した時刻での極限点が存在することはわかった。一方それを“極限過程”の有限次元時間分布と考えると過程に連続性がないということが判明し、期待していたような極限過程が構成できないという結論に至った。しかし上で行ったランダム媒質中のディレクティドポリマーの研究により２次元でのランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーの高温での挙動に対する評価を次のように改善することに成功した。

$$\frac{\log|\log|F(\beta)||}{\log\beta} \to -2$$

この結果は後に Q.Berger，H.Lacoin らによってさらに厳密な評価

$$\beta^2 \log|F(\beta)| \to -\pi$$

が与えられたことは言及しておく必要がある。また F.Caravenna，R.Sun，N.Zygouras らによって上で考えたランダム環境のスケ

ーリングに対して２次元ランダム媒質中のディレクティドポリマーの分配関数の弱収束極限が与えられたことはこの分野における重要な発展である。

研究方法(B-ii)の問題を考えるためには一度３次元以上のランダム媒質中のディレクティドポリマーについて考える必要があった。３次元以上のランダム媒質中のディレクティドポリマーでは２種の相転移の定義が知られている。ひとつは分配関数の極限の自明、非自明によって定義され(weak-disorder vs strong disorder)、もう一つは自由エネルギーの自明、非自明(very strong disorder)によって定義される。Very strong disorder であるならば strong disorder であることが知られているがこれらが一致する（逆が成り立つ）かどうかは知られていない。そこでまずはこれらの相転移の臨界点について考察した。その方法として測度の変換による解析手法に注目した。測度の変換により strong disorder、very strong disorder の特徴づけに成功した。特に新しい測度の下で考えた分配関数が発散するとき strong disorder であり、指数的に発散するとき very strong disorder になることがわかった。よって発散の程度に関する研究を行った。まずは新しい測度の下で考えた分配関数と同じ分布を持つような確率模型を考えることにした。これはランダム媒質中のディレクティドポリマーを考えるときのハミルトニアンにさらに新しいランダムウォークとの衝突回数によって定義される項を加えたもので記述できた。これをランダム媒質中のランダムウォークピニングディレクティドポリマーと呼ぶことにする。この発散について研究する前にまずは比較的簡単なランダム媒質について期待値をとって定義した分配関数について調べた。この模型はランダムウォークピニング模型と呼ばれるものである。ランダムウォークピニング模型にも分配関数の収束，発散，指数的発散による２種の相転移が考えることができる。発表論文①ではこれらの相転移の臨界点が一致することを確かめた。しかしランダム媒質中のランダムウォークピニングディレクティドポリマーの相転移の臨界点の一致の証明にまでは至っていない。これは今後の研究課題として考えている。臨界点の考察にはその後も様々な研究がなされているが現時点では有用なものは見つかっていない。今後の方針としては E.Bates, S.Chatterjee らが行った update-map を用いた自由エネルギーの解析手法をランダムウォークピニングディレクティドポリマーの自由エネルギーの解析を行うことによって研究することを考えている。

研究方法(A-ii)の問題の解決を図った際に上でも述べたようにランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーの高温での挙動について研究を行った。その際に１次元ランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーの高温での挙動についても研究を行った。１次元ディレクティドポリマーは以下のように KPZ 方程式との関わりがあることが知られている：時刻 n に対して逆温度を n^{-1/4}倍、空間を n^{-1/2}倍するというスケーリングをとり極限考えると KPZ 方程式

$$\partial_t Z = \frac{1}{2}\Delta Z + \sqrt{2}ZW$$

の Cole-Hopf 解である確率熱方程式の解に弱収束する。この点に注目し１次元でランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーの高温での挙動が確率熱方程式の解の減衰速度で記述できる

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{F(\beta)}{\beta^4} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log Z_T$$

という予想があった。この予想は端的にいうと微分積分学においても初歩的な問題である２つの極限(n に関する極限と T に関する極限)の交換がこの問題では可能であるという予想である。そこでこの予想に取り組み実際に問題を解決した。これは上からの評価と下からの評価によって解決されたが下からの評価は上で述べた分配関数が確率熱方程式の解に弱収束するという事実と自由エネルギーが分配関数のある種の極限として得られることから容易に得られた。上からの評価は pinning model などの統計力学模型でよく用いられる coarse graining 法と分数モーメントの評価を適当な形で行うことで成功した。またこれらの成果として確率収束のみが知られていた

$$\frac{\log Z_T}{T} \to -\frac{1}{6}$$

を L^1-収束することも示すことができた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Makoto Nakashima: The free energy of the random walk pinning model，査読あり，Stochastic Processes and their Applications，128，2018 年，373～403
② Makoto Nakashima: Branching random walks in random environment and super-Brownian motion in random environment，査読あり，Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques，51，2015 年，1251～1289
③ Makoto Nakashima，A remark on the bound

for the free energy of directed polymers in random environment in 1+2 dimension, 査読あり, Journal of Mathematical Physics, 55, 2014年

〔学会発表〕（計　16　件）

① 中島誠: ランダム媒質中のディレクティドポリマー, 2018年確率論早春セミナー, 神戸大学, 2018年3月.
② Makoto Nakashima: On the asymptotics of the free energy of directed polymers in random environment in 1+1 dimension, 16th International symposium "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems", 東京大学, 2017年11月.
③ Makoto Nakashima: On the asymptotics of the free energy of directed polymers in random environment in 1+1 dimension, Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017, TU Kaiserslautern, Kaiserslautern, 2017年9月.
④ Makoto Nakashima: Branching random walks in random environment, Stochastic Processes and their Applications, Moscow, 2017年7月.
⑤ Makoto Nakashima: On the asymptotics of the free energy of directed polymers on hierarchical lattice, 15th International symposium "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems" , 東京大学, 2016年11月
⑥ Makoto Nakashima: Phase transitions of random walk pinning model. 14th International symposium "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems", 京都大学, 2015年10月
⑦ Makoto Nakashima: Phase transitions of random walk pinning model, Stochastic Analysis and Applications, 東北大学, 2015年9月
⑧ Makoto Nakashima: 生物人口模型から現れる確率偏微分方程式, HMA セミナー冬の研究会 2015, 広島大学, 2015年1月
⑨ Makoto Nakashima: Stochastic heat equation arising from a certain branching systems in random environment, 2014 年度確率解析シンポジウム, 東北大学, 2014年10月
⑩ Makoto Nakashima: 1+2次元ランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーの高温度での評価, 2014年度日本数学会秋季総合分科会, 広島大学, 2014年9月

〔図書〕（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~nakamako/publicationsprep.html

６．研究組織
(1)研究代表者
中島　誠（NAKASHIMA, Makoto）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：60635902