2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：３４３１６
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2016
課題番号：２６８０００５２
研究課題名（和文）Small representationの解析学的モデルの構成

研究課題名（英文）Constructions of analytic models of small representaions

研究代表者
久保　利久（Kubo, Toshihisa）

龍谷大学・経済学部・講師

研究者番号：９０６４７６３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において様々な結果が得られたが、「Torasso表現」と呼ばれる表現がある絡微分作用素の解空間に構成できたことは、特筆すべき結果の一つであると思われる。Torassoは1983年の論文において、ある表現を構成したが、その構成法は非常に技巧的であり簡単では無い。一方で、我々の方法においては良く知られた常微分方程式（超幾何微分方程式）を解くことによってその表現を構成するため、何も難しい技術は必要としない。

今の所ある特定のLie群にしか我々の方法を適用していないが、今後は他のLie群への適用についても研究を推し進めていく所存である。

研究成果の概要（英文）：For this research program we have studied about realizations of small (infinite dimensional) representations in solution spaces to intertwining differential operators. Over the years we have succeeded realizing a number of small representations, one of which is called Torasso's representation. In 1983 Torasso constructed a genuine small representation by using a somewhat technical method; it requires a certain efforts to construct the representation. In contrast, in our method, one can easily construct the representation by solving a well-known ordinary differential equation (hypergeometric differential equation).

So far we have applied our method only to a particular Lie group. Nonetheless, as the technique itself is simple, it is likely that it can be applied to other real simple Lie groups. We are planning on pursuing our method for further study.

研究分野：Lie群・Lie環の表現論

キーワード：small representations　Torasso's representation　Verma modules　hypergeometric equations

１．　研究開始当初の背景

研究開始当初，私は主系列表現間の絡微分作用素の具体的構成に取り組んでいた．その動機としては主系列表現間の絡作用素としては主に積分作用素が研究されており,ラプラシアンやディラック作用素などの特別な場合を除くと，絡微分作用素はあまり詳しい研究がされていなかったことがあげられる．

研究のより具体的な内容としては，まず 2008 年に Barchini—Kable—Zierau によって提案された構成法の一般化に着手した([BKZ08])．これにより，彼らの構成法では対応できない場合に関しても，絡微分作用素を構成することに成功した（[Kubo14B])．また一般 Verma 加群間の準同型と主系列表現間の絡微分作用素の間には，ある種の duality theorem が存在することが知られていることから，より一般的な構成法を目指し，この duality theorem を通した絡微分作用の構成にも取り組んだ（[Kubo14A])．

２．　研究の目的

本研究の目的は絡微分作用素の解空間に「サイズの小さな無限次元表現」(“small representation”) を実現することにある．この small representation は簡約リー群の表現論において重要な研究対象であるにも関わらず，その構成法は代数的にも解析的にもよく知られていない．一方で絡微分作用素でもあるラプラシアンの解空間に「極小表現」と呼ばれる small representation が実現されることが知られている．(例えば，参考文献[KØ03]参照.)「１．研究開始当初の背景」として上述したとおり，本研究を開始するまで絡微分作用素の具体的構成に主に取り組んできた．本研究では，それまで構成してきた絡微分作用素の解空間を調べることにより，small representation の具体的な構成法を示すことを研究目的とした．

３．　研究の方法

研究の方法としては，当初それまで構成してきた絡微分作用素の解空間を調べる予定であったが，それらの微分作用素が複雑であったため，まず扱う微分作用素をより調べやすいそれへと変更することとした．そこで Ørsted 氏の論文[Orsted00]での研究を参考に扱う群を SL(3,R)の double covering である SL(3,R)^~に変更し，扱う微分作用素を変更した．

上記の変更を加えた後もいろいろな研究者の方と研究連絡をし，研究方法等を随時変更しながら研究を推し進めた．最終的には研究手順は主に次の２つのステップに分けられる．

ステップ 1: 絡微分作用素の分類および構成
ステップ 2: 各絡微分作用素の解空間の考察

まず，扱う群を変更したことにより，ステップ１として，考える微分作用素の分類および構成に新たに取り組んだ．この分類に関しては duality theorem により，まず Verma module 間の準同型の分類に帰着させ，その後 BGG—Verma の理論により分類した．また構成に関しては，自身の論文[Kubo14A]で使った方法より構成することに成功した．

また本研究では考える解空間として，K-finite solution の空間を考えている．したがって，ステップ 2 においては，まず Peter—Weyl theorem を用い，扱う微分作用素が K-finite vector に対し，どのように作用するか詳しく考察した．ここでは，特に Kable 氏が[Kable11], [Kable12]で考案した理論が大変参考になった．また上記の 2 つの論文において Kable 氏は K-finite solution を求めているが，この方法は煩雑な計算を必要することから，本研究ではその手法を用いずに超幾何微分方程式を用いる方法で煩雑な計算を全くせずに K-finite solution を決定する方法を用いた．

４．　研究成果

さて，研究成果であるが，幸いにも数々の small representation を解空間に実現することに成功した．これには今日「Torasso 表現」と呼ばれる特別な SL(3,R)^~の small representation も含まれている．Torasso 表現は，これまでにも Rawnsley—Sternberg ([RS82]), Torasso ([Torasso83]), Ørsted [Ørsted00], A. Lucas ([Lucas08])などによって構成されてきたが，Verma module を用いた方法はなく，small representation の構成において新たな知見が得られたと思われる．

本研究は研究手法の改善に力を入れていたこともあり，残念ながら研究補助の期間中に研究内容を論文にまとめることができなかった．ただその甲斐あり，「３．研究の方法」で述べたように small representation を構成する際，超幾何微分方程式のアイデアを用いることに成功した．（解空間に実現される表現を考察する際，SL(2)の有限次元表現から現れるある漸化式を解く必要があったが，当初はこれを代数的に解いており，より意味のある解法を求めていた.）この方法の発見により small representation, Verma module, hypergeometric equation, と一見独立している三つの事柄が本研究において綺麗に一つにまとまった．このような事象が他の群に対してどのように現れてくるか今後考えていきたい．

本研究では研究開始序盤で扱う微分作用素を一度変更したが，変更後しばらくはある２次の微分作用素についてのみ考察を続けていた．その後，他の研究者の方からの質問により，微分作用素の分類に思い至り，１次,

３次，４次の微分作用素も構成できることに気づいた．これまでのところ１次，２次の微分作用素の考察までしか終わっていない．今後３次，４次についても引き続き研究を続ける予定である．

参考文献：

[BKZ08] L. Barchini, A.C. Kable, and R. Zierau, Conformally invariant systems of differential equations and prehomogeneous vector spaces of Heisenberg parabolic type, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 44 (2008), no. 3, pp. 749-835.

[Kable11] A.C. Kable, K-finite solutions to conformally invariant systems of differential equations. Tohoku Math. J. (2) 63 (2011), no. 4, 539-559.

[Kable12] A.C. Kable, Conformally invariant systems of differential equations on flag manifolds for G2 and their K-finite solutions, J. Lie Theory 22 (2012), no. 1, pp. 93-136.

[KØ03] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of O(p,q) I. Realization via conformal geometry, Adv. Math. 180 (2003), no. 2, pp. 486-595.

[Kubo14A] T. Kubo, Systems of differential operators and generalized Verma modules. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 10 (2014), no. 008, 35 pages.

[Kubo14B] T. Kubo, Special values for conformally invariant systems associated to maximal parabolics of quasi-Heisenberg type. Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 4649-4696.

[Lucas08] A.R. Lucas, Small unitary representations of the double cover of SL(m). Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 6, 3153-3192.

[Ørsted00] B. Ørsted, Generalized gradients and Poisson transforms. Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999), 235-249, Sémin. Congr., 4, Soc. Math. France, Paris, 2000.

[RS82] J. Rawnsley and S. Sternberg, On representations associated to the minimal nilpotent coadjoint orbit of SL(3; R). Amer. J. Math. 104 (1982), no. 6, 1153-1180.

[Torasso83] P. Torasso, Quantication géométrique, opérateurs d'entrelacement et représentations unitaires de (SL^~)3(R). Acta Math. 150 (1983), no. 3-4, 153-242.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　2　件）

１：<u>久保　利久</u>, “Verma modules and intertwining differential operators”, Langlands and Harmonic Analysis, 熱海, 2017 年 2 月 6 日

２：<u>久保　利久</u>, “On a construction of unipotent representations of the universal covering group of SL(3,R)”, 青学表現論セミナー, 青山学院大学, 2016 年 12 月 16 日

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

https://sites.google.com/site/toskubo00

６．研究組織
(1)研究代表者

久保　利久（KUBO, Toshihisa）
龍谷大学・経済学部・講師

研究者番号：90647637

(2)研究分担者

(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者

ØRSTED, Bent (ØRSTED, Bent)