

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800053

研究課題名(和文)一般化されたレブナー理論の基礎研究とその応用

研究課題名(英文)Researches of fundamental and applied properties for Modern Loewner Theory

研究代表者

堀田 一敬(Hotta, Ikkei)

山口大学・創成科学研究科・講師

研究者番号：10725237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究プロジェクトにおいては、統一レブナー理論と呼ばれる新しい理論体系におけるレブナー方程式の解析、またはその他分野への応用が計画された。結果としてHerglotz関数とevolution familyとの関連性、レブナー関数の擬等角拡張性、さらに関連する幾何的解析学における結果など、多くの新しい結果を得るに至った。本結果は複数の国際研究誌に掲載され、また多くの海外・国内の研究集会において発表された。

研究成果の概要(英文)：Recently a new approach to treat evolution families and Loewner chains in a quite general framework has been suggested. It enables us to describe a variety of the dynamics of one-parameter family of conformal mappings. In this research project, we have investigated fundamental and properties and applications of Modern Loewner Theory, including relations between evolution families and Herglotz functions, and sufficient conditions of quasiconformal extensions for chordal/Ld-Loewner chains. These results were published in international mathematical journals, and presented in many international/domestic conferences.

研究分野：解析学基礎

キーワード：レブナー方程式 着等角写像 等角写像 シュラム・レブナー発展

1. 研究開始当初の背景

レブナー方程式について説明する。レブナー方程式は、複素変数による、時間パラメータ付きの等角写像が満たす偏微分方程式である。

複素平面上の単連結領域が連続的に広がる時、リーマンの写像定理により単位円板をその領域へと写す等角写像族が存在する。このような関数が満たす偏微分方程式をレブナー微分方程式という。

レブナー理論は「広がる」という非常に自然な現象を数学的に特徴づけることから、その応用範囲は物理・工学から社会学まで幅広い。その最たるものが 2000 年に提唱された SLE である。SLE が統計物理学、共形場理論に与えた影響は甚大であり、マンデルブロ予想の解決を含む多くの重要な結果がもたらされた。また 2 名の数学者が SLE に関連する研究によりフィールズ賞を受賞している。このように現在レブナー理論を取り巻く研究は現代数学において最先端のトピックの一つであり、レブナー理論の研究を推し進めることは学術的に非常に高い意味を持つ。

2. 研究の目的

2010 年から 2012 年にかけて、既存の古典的レブナー方程式や SLE、さらには正則関数の半群性理論をも含むような統一的な理論がブラッチ、コントララス、ディアスマドリガル、グメニユクらによりもたらされた。以下、本報告書ではこれを『統一レブナー理論』と記すことにする。本研究計画では、この新しい統一レブナー理論の基本的性質の整備および発展を目指す。

3. 研究の方法

- (1) 【基礎研究】レブナー関数の幾何的性質の調査: 統一レブナー理論の導入により、従来に比べて非常に緩い条件のもとでレブナー関数が特徴付けられた。統一レブナー理論においては、レブナー関数と Herglotz 関数と呼ばれる力学系を制御する関数との 1対1 の関係が本質的である。よって本研究計画では、レブナー関数の像領域の幾何的な性質及び挙動と Herglotz function との関係性を明らかにすることを目標とする。また函数論における基本的な性質として、レブナー関数及び Herglotz 関数の族がなす集合の構造を調査する。
- (2) 【応用研究】統一レブナー理論の擬等角拡張問題への応用: 普遍タイヒミュラー空間は「擬等角拡張を持つ等角写像」によって特徴づけられることが知られている。これまでの研究ではそのような等角写像を特徴づけるためにレブナー理論を応用し、多くの新しい結果を導いた。一方で従来のレブナー理論では扱いが容易でない等角写像の存在も明らかになった。よって本研究計画では擬等角拡張問題に

統一レブナー理論を導入することでこのような問題点を克服し、レブナー理論とタイヒミュラー空間との親密性をより深める事を目標とする。

- (3) 【国内普及】国内におけるレブナー理論の研究状況の改善: 前述のようにレブナー理論の研究は現在大きく動いており、2000 年以降出版された関連論文は 1000 を超える。一方で国内での研究は依然として盛んでなく、同理論が国内に浸透しているとは言い難い状況である。そこで国内の研究者や若い学生のレブナー理論研究への参入を促すための活動に従事する事を目標とする。

4. 研究成果

得られた研究結果は次の通りである。

- (1) Gumenyuk 氏と共に、Chordal レブナー方程式に関する基本的な性質を導き、理論整備を行った。具体的には、1965 年の Pommerenke による Radial レブナー関数の特徴づけ、また 1972 年の Becker による擬等角拡張条件を Chordal の場合へと拡張した。さらにこの拡張性定理を用いることで、今まで知られていなかった新たな単葉関数の擬等角拡張条件を導くに至った。本結果は論文として投稿され、Math. Z. (2017) に掲載された。
- (2) (1) の結果をもとに、Radial 及び Chordal を内包した統一レブナー理論の枠組みで擬等角拡張定理を導いた。証明において、1972 年の Becker の結果及び 2017 年の Gumenyuk 氏と堀田の結果で決定的な役割を果たした radial limit 関数による近似が適用できない事がわかり、この大きな問題を克服するために新たな近似定理を導入した。これは 1998 年の Roth の結果を統一レブナー理論の枠組みに洗い直したものである。結果として、Herglotz 関数列の弱い収束性からレブナー関数列の広義一様収束性が得られることがわかり、この近似定理を用いて証明を与えることができた。本結果は論文として投稿され、現在査読審査中である。
- (3) 王氏と共に、単葉関数の積分作用素についての性質を調べ、1992 年に Becker により導入された逆レブナー関数の理論を応用することで積分作用素に関する新たな擬等角拡張条件を証明することができた。また、この作用素が単葉関数の幾何的・解析的性質がどのように変化させるかを調査し、導関数の実部が正であるという性質を保つための必要条件を導いた。本結果は論文として投稿され、Rocky Mountain J. Math. (2017) に掲載された。
- (4) 王氏とともに、近接凸関数およびその特別な場合である能代ワルシャウスキ関数に関する性質を導いた。近接凸関数の像領域は直線的到達可能領域として特徴づけられる事が知られている。しかしその

証明は難解でありさらにフランス語で書かれているため、証明を追うのは容易ではない。そこでレブナー方程式を用いてこの性質の別証明を与えた。本研究のもうひとつの結果としては、能代ワルシャウスキ関数に関する基本性質の導出である。ひとつは像領域の境界が局所連結では限らない事、もうひとつは能代ワルシャウスキ関数であるが星状ではない関数の具体例を構築することである。本結果は現在論文執筆中であり、完成し次第投稿する予定である。

- (5) Michalski 氏と共に、主要部が星状領域である調和単葉関数の基本的性質について調査した。等角写像の研究においてはレブナー方程式や変分法といった有効手段が知られているが、調和関数においてはそのようなものはあまり知られていない。そこでレブナー方程式を調和関数論に導入する研究を進めている。本結果はその足掛かりとなる研究である。本結果は論文として投稿され、Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz, Ser. Rech. Deform. (2014) に掲載された。
- (6) 島内氏と共に、Radial レブナー方程式の数値解を導出する研究、および得られた解を可視化する研究を行った。レブナー方程式は解が一意に定まることが知られているが、その具体例はあまり多く知られていない。また与えられた Herglotz 関数に対して定義されるレブナー方程式の解は一般的にはよくわからない。そこでレブナー方程式を数値的に解き、その解を 2 次元平面上の流れとして可視化することで Herglotz 関数とレブナー関数との関連性を明らかにする事を目標とした。ここで用いられたレブナー関数の近似解およびそのアルゴリズムは、計算精度を上げれば収束するような再帰的公式によってその収束性が理論的に裏付けられている。本結果は論文としてまとめられ、現在投稿中である。
- (7) 2014 年にレブナー方程式に関する国際研究集会を開催した。本研究集会においては、可積分系・関数方程式・統計数学など様々な分野からレブナー方程式との関連とその研究について講演を頂き、分野の横の繋がりを作ることができた。また海外から 4 名の研究者を招聘し、国内と海外との交流も推し進めた。この研究集会がきっかけとなり、いくつかの新たなプロジェクトも生まれた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Pavel Gumenyuk and Ikkei Hotta, Chordal Loewner chains with

quasiconformal extensions, Math. Z. 285 (2017), no. 3-4, 1063-1089. (査読あり)

DOI: 10.1007/s00209-016-1738-2

Ikkei Hotta and Li-Mei Wang, Quasiconformal extendibility of integral transforms of Noshiro-Warschawski functions, Rocky Mountain J. Math. 47 (2017), no. 1, 185-204. (査読あり)

doi:10.1216/RMJ-2017-47-1-185

Ikkei Hotta and Andrzej Michalski, Locally one-to-one harmonic functions with starlike analytic part, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform., vol. 64, no. 2 (2014), 19-27. (査読あり)

URL:

<http://www.ltn.lodz.pl/streszczenia/Bulletin-642-poprawiony.pdf#page=19>

[学会発表](計 8 件)

Ikkei Hotta, Linearly accessibility by flows associated with Loewner's equations, XVIIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, 2016 年 7 月 27 日, The State School of Higher Education in Chem (ポーランド).

Ikkei Hotta, Computational approach to Loewner theory, Second International ACCA-JP/UK Workshop, 2016 年 1 月 18 日, 京都大学(京都府京都市).

Ikkei Hotta, Geometric properties of functions whose derivative has a positive real part, The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2015 年 8 月 25 日, 九州産業大学(福岡県福岡市).

Ikkei Hotta, Ld-Loewner chains with quasiconformal extensions, International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory, 2014 年 11 月 23 日, 東京工業大学(東京都目黒区).

Ikkei Hotta, Introduction to Loewner theory, International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory, 2014 年 11 月 22 日, 東京工業大学(東京都目黒区).

Ikkei Hotta, Ld-Loewner chains with quasiconformal extensions, 2014 年度秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学(広島県広島市).

Ikkei Hotta, Chordal Loewner chains with quasiconformal extensions, The 22nd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2014 年 8 月 8 日, Dongguk University (韓国)

Ikkei Hotta, Ld-Loewner chains with quasiconformal extensions, XVIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, 2014 年 7 月 2 日, The State School of Higher Education in Chełm (ポーランド).

〔その他〕

ホームページ等

<http://cajpn.org/Loewner2014/>

International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory 2014

6. 研究組織

(1) 研究代表者

堀田 一敬 (Hotta, Ikkei)

山口大学・大学院創成科学研究科・講師

研究者番号：10725237