様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２８　年　１０　月　２０　日現在

機関番号：３２７１４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８０００６４

研究課題名（和文）量子可積分系の固有値と古典可積分系の保存量の対応の研究

研究課題名（英文）Correspondence between spectra of quantum integrable systems and integral of motions of clasical integrable systems

研究代表者
土谷　洋平（TUTIYA, Yohei）

神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・准教授

研究者番号：８０４６０２９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　900,000円

研究成果の概要（和文）：　線形作用素の対角化問題は、それが行列であれ微分作用素であれ差分作用素であれ、物理的には、なんらかの量子力学のシュレディンガー方程式とみなすことができます。そしてあらゆる量子力学の対象には、対応する古典極限というものが存在します。Macdonald作用素という線形作用素にこのような物理的な見方を適用することで、コヒーレント状態のような量子ー古典対応があることが分かってきました。また、共同研究における副産物としてsin-Gordon模型の形状因子の計算にも貢献することができました。

研究成果の概要（英文）：Diagonalizing problems of linear operators can be regarded as Schrodinger equations of quantum mechanics. Such viewpoints are applicable to any operator even if it has no physical background. We treated Macdonald difference operator as a quantum Hamiltonian with this perspective and analysed its classical limit. The classical limit is Benjamin-Ono like soliton equation. We found that we can define the coherent states to the quantum system and observed that the states behaves like solitons. We also made some contribution to a calculation of form factors of the quantum sin-Gordon equation.

研究分野：数理物理

キーワード：非局所型ソリトン　マクドナルド多項式　コヒーレント状態

１．研究開始当初の背景

物理学では普通、考察したい現象というものが先にあり、それを数式で表現し、分析していきます。しかし逆に、数式が先にあり、それをなんらかの物理現象を表す方程式に見立てて分析していくと、思わぬ奥の深さに行き当たるということがあります。広く「数理物理」と呼ばれる分野の得意なやり方のひとつです。そのような過程を経て見つかったものは、「現実と無関係な数学的な興味に過ぎない」と非難される時もありますが、多くの場合、現実との対応も見つかり、数学だけにとどまらない学際的な興味の対象へと発展していくこともしばしばです。数学的に奥が深いものには、やはり何かがあるのです。本研究もそのような発展を想起させるものとして始まりました。

およそ固有値問題というものは、高校生や大学生がやる行列の対角化であれ何であれ、量子力学のシュレディンガー方程式に見立てることができます。そうすると、形式的にはそこからいろいろな物理を連想することができます。ほとんどの場合そのようなことをしてもなにも面白いことは出てこないのですが、マクドナルド作用素と呼ばれる線形差分作用素の固有値問題を量子力学のシュレディンガー方程式に見立てて古典極限をとると、水中の境界層に出来る波を記述する古典力学の方程式が現れました。ソリトン方程式と呼ばれるタイプの、美しい構造を備えた方程式です。この発見が本研究の端緒でした。さらにこの方程式を解いて、波のエネルギー等のいくつか保存量を計算して並べてみると，元のマクドナルド作用素の固有値の並びと全く同じ構造をもっているように見えます。ということは、量子力学系の固有値と、その古典極限である古典力学系の保存量にはなんらかの対応があるのかもしれません。広く物理一般においてこのような対応があることは期待できないと思いますが、特殊なケースに限るとしても十分神秘的な現象ですし、このようなことを提唱した人も見当たりません。この現象の背後にあるものを詳しく調べることが本研究の出発点でした。

２．研究の目的

研究の小目標は前項で述べた対応を正確に定式化することと，この奇妙な現象を他の研究者に紹介することでした。また大目標としては，より一般のクラスの線形作用素を量子系の Hamiltonian に見立てて古典極限をとり，固有値の情報が古典系にどのように引き継がれるのかを調べ、一般論を構築したいと考えていました。

３．研究の方法

本研究の目的は、マクドナルド作用素という線形作用素から出発して無理矢理物理学を展開したら、意外な対応現象が見つかったのでそれを説明したい、というものでした。対応現象の片方の対象であるソリトン方程式は研究代表者である私の専門でしたが、それ以外の分野について、私はあまり詳しくはありませんでした。これは、初等的であっても分野横断的な問題設定から出発したときにはよく起こる難点の１つです。こういう場合、各分野の専門家に参考意見を仰ぎ、必要な知識を教えてもらうのが一番なのですが、専門外の問題なわけですから、そもそも親しい専門家が近くにいません。また、あまりに無知なまま教授をお願いするのは失礼ですし、教えてもらっても理解することができません。２年間という研究期間のうち最初の１年は、量子系とマクドナルド作用素の勉強に充てつつ、ソリトン方程式についてわかることを徹底的に調べることにしました。そして、２年目には量子系の関連分野の専門家に会って本研究の内容を知ってもらい、意見交換をしてアドバイスをもらう、ということにしました。

(1)１年目の研究内容

マクドナルド作用素の対角化問題の古典極限で得られる古典力学系は離散ラプラシアン付きベンジャミン−小野(PBO)方程式と言います。この古典力学方程式の周期ソリトン解の保存量の系列と、マクドナルド作用素の固有値の系列の間に対応が付く、というのが背景の項で説明した現象でした。研究代表者が得意とする古典力学サイドから調べる場合、取り掛かれる問題が２つありました。PBO 方程式の保存量の系列を完全に求めきるという問題と、PBO の一般化である PILW 方程式で、同様の対応現象がありそうかを調べるという問題です。PBO 方程式の保存量は運動の第一積分から第三積分くらいまでは大変でしたが求めることができていました。一般の場合について、結果はシンプルなのだし何かうまいやり方があるには違いないのだが分からない、という状況が２ヶ月ほど続きました。諦めて一般化である PILW 方程式の周期ソリトン解を求めることにしました。問題を一般化して高い視点から見直すことで、本質が見えてきて解決する、ということが数学ではよくあります。なお、周期ソリトン解とは、この分野では通常「代数幾何的な解」と呼ばれる解のことですが、仰々しいので、この原稿では簡単のために周期ソリトン解と呼ぶことにします。グラフで波形をプロットすると、いくつかのソリトンがクルクルと周期的に回っているように見えるので、研究者同士の会話でも時々そう呼ぶこともあり、造語というほどのものではありません。ソリトン方程式の周期ソリトン解については数十年にわたる豊富な先行研究があり、調べつくされている感があります。しかし PILW 方程式が属する「非局所型ソリトン方程式」と呼ばれるタイプの方程式についてだけは、2-ソリトン以上の周期ソリトン解は知られてい

ませんでした。周期ソリトン解を求めるには、一旦コンパクトリーマン面という図形を作り、それを使って求めるのですが、「非局所型ソリトン方程式」の場合は、コンパクトリーマン面の形状を指定する条件が独特であり、そもそもそのような条件を満たすリーマン面が存在するのか、という問題が未解決なのです。そのようなリーマン面が存在しないのならば、周期ソリトン解も無い、ということになってしまいます。研究代表者の見たところ、非局所型の中でも PILW 方程式の場合は「特有の条件」が比較的易しく、なおかつまだ誰も着手していないように思われました。実際にアタックしてみると、リーマン面の解析的な性質についての深い理解が必要になりました。研究代表者はリーマン面の専門家ではないので、教科書を買い集めて読むところから初め、勉強に半年以上はかかりました。研究１年目の終了間際の１月と２月に行った研究出張で、津田塾大学の中屋敷厚氏と京都大学の塩田隆比呂氏の貴重な助言を得て、3 月頃に PILW 方程式には 2-ソリトンと 3-ソリトン解が存在することを示すことができました。本研究にとって大きな前進であり、一旦ここで論文を書くことをも考えました。しかし、今回見つけたやり方は 4-ソリトン以上の構成には役立たず、ソリトンの専門家から言わせれば、正しいけれども苦し紛れであり、非局所型の分析にブレイクスルーを予感させるものではない、という評価が予想されました。また、非局所型の中でも最も有名な ILW 方程式で成功したのであれば、3-ソリトンまでという結果であっても十分なインパクトになると思われましたが、残念ながら ILW への応用は難しいように思われました。研究も２年目に入り、残り時間も少なくなってきました。本研究がもう少し進めば、この結果も併せて論文に出来るだろうと考え、結果の整理はひとまず諦めることにしました。PBO の一般化である PILW を考察してきたわけですが、最初は周期ソリトン解があるかどうかわからない、つまり一般化の可能性があるかどうかわからなかったわけです。しかし 3-ソリトンまで見つけたのだから、十分可能性の裾を掴んだと言えるだろうと考えて、対応現象のもう片方の対象である量子系について調べ始めることにしました。

(2)２年目の研究内容

量子系と古典系の対応現象について調べる研究を行っているわけですが、既に見つかっている現象の理解を深めることについては、１年目の研究で一矢報いたと感じはしたものの、難しさをひしひしと感じ始めていました。そこで、新しい現象を発見して対応の存在を強化することを考えました。一般に、量子系に対しては「古典極限」と呼ばれる操作を行うと対応する古典力学系が得られるということは、大学の物理の授業などでも教えられているような周知の事実です。しかし、それは方程式が移行することを示すだけのものであり、量子系の特定の状態や物理量が、古典系にどう対応するのか、と言ったことについては何も言っていません。大ざっぱな言い方をすれば、極限操作による方程式の移行については述べていても、解の移行ないし対応についてはほとんど何も調べられていないのが現状です。その唯一とも言える例外が、調和振動子のコヒーレント状態です。コヒーレント状態は、消滅演算子の固有状態として定義される状態であり、その時間発展を観察すると波束の位置が振動します。それは古典系の調和振動子、すなわちバネにつけられた錘の振動にちょうど対応します。標語的には、量子系の中に、古典系と対応する状態を見つけた、と言えるものです。本研究においても、量子系であるマクドナルド作用素の作用する空間の中に、PBO 方程式の解に対応する状態が、見つかるのではないか、と考えました。あるとすれば、それは消滅演算子の固有状態であり、おそらく時間発展させるとソリトン的な動きをするものではないかと期待されます。実際に、消滅演算子の固有状態を時間発展させ、適当な物理量の期待値を計算すると、確かに古典系の 1-ソリトンや 2-ソリトンが現れました。つまり、古典系は量子系の高エネルギー状態を観測していることに相当する、という説明が、PBO 方程式にも成り立ちそうである、ということになり、これは本研究のメインテーマである対応現象を強化する結果と言えます。この結果は 2016 年１月に招聘した、CAE Saclay （フランス）の Vincent Pasquier 氏と、東京大学の白石潤一氏との共同研究で見つかったものです。2016 年 6 月現在、論文を共同執筆中です。また、2016 年３月には、本研究に興味を持ってくれた Landau Institute （ロシア）の Yaroslav Pugai 氏と Mikheil Lashkevich 氏を東京大学の白石潤一氏の科研費と共同で招聘し、議論を行うことができました。両氏が研究している sin-Gordon 模型と呼ばれる場の理論の形状因子の計算と本研究で頻繁に現れる計算には類似点があり、おそらく、なんらかのつながりがあるのだと考えられます。本研究の目的からは外れますが、このときの議論で sin-Gordon 模型のフォック空間の構造について新しい理解が得られたため 2016 年 6 月現在 4 人で論文を執筆中です。

４．研究成果

本研究の成果は大きく分けると３つです。

(1)複素無理数係数の主因子を持つリーマン面の構成

複素平面上で極や零点の配置を指定し、そのような極や零点を持つ関数が存在するか、という問題を考えることができます。これと同様の問題がコンパクトリーマン面上でも考えることができます。本研究では、極や零点に加えて無理数指数を持った対数型特異点の場所も指定し、そのような対数的多価性

を持った関数がリーマン面上に存在するか、という問題を考えることになりました。種数3以下のリーマン面について、「3点でのみ1位極を持つ第3種微分で、a-周期,b-周期が共に0になり、なおかつ3点での留数の比が無理数であるようなものが存在する。」ということを示すことができました。数学的には直線束の複素冪に関して応用があるというアドバイスを受けています。また、非局所型ソリトン方程式の種数2以上の周期ソリトン解を求めるという未解決問題に一石を投じるものです。

(2)量子マクドナルド系のコヒーレント状態が離散ラプラシアン付きベンジャミン--小野方程式のソリトン解であるという発見
マクドナルド多項式にはピエリルールと呼ばれる公式があるのですが、これがそのまま消滅演算子とコヒーレント状態の関係式と読めることが分かりました。マクドナルドの数学的な理論には物理サイドからの解釈をもう１つ見つけたことになります。2016年3月に招聘した研究者の同僚から、本研究や関連する過去の論文に関する質問のメールが来ており、今後徐々に本研究にヒントを得た研究が現れると予想されます。

(3)sin-Gordon 模型の形状因子の計算への貢献。2016 年度 3 月に招聘した Pugai 氏と Lashkevich 氏から、sin-Gordon 模型の形状因子の計算においてPBO方程式の運動の積分と同様の困難にあっている、という内容のレクチャーを受けました。本研究で現れる数学的な構造が普遍的なものであるならば、それは貢献できる分野も多い、ということになります。また、両氏を招聘し議論したことにより、本研究の目的からは外れましたが招聘時に行った議論によってフォック空間の理解が進み、現在共同での論文作成に至っています。国内外の科学分野の連携に貢献していると言えます。

５．主な発表論文等

〔学会発表〕（計　２件）
Vincent Pasquier
東京無限可積分セミナー（東京大学数理科学研究科，2016年2月8日）

Yaroslav Pugai，Mikheil Lashkevich
形状因子とCFTの摂動理論の周辺（東京大学数理科学研究科，2016年3月22日）

６．研究組織
(1)研究代表者
土谷 洋平　（TUTIYA，Yohei ）
神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・准教授
研究者番号：８０４６０２９４

(2)研究協力者
白石 潤一（SHIRAISHI，Junichi）
東京大学数理科学研究科・准教授
PUGAI，Yaroslav
LASHKEVICH，Michaeil
PASQUIER，Vincent