

様 式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

科学研究費助成事業

研究成果報告書



平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：11401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800065

研究課題名(和文)非線形熱拡散方程式の爆発問題について

研究課題名(英文)Blowup problems for nonlinear heat equations

研究代表者

原田 潤一 (Harada, Junichi)

秋田大学・教育文化学部・准教授

研究者番号：00580169

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000 円

研究成果の概要(和文)：非線形熱拡散方程式における特異性発生の機構についての研究を行った。特異性とは主に、解の値が無限大に発散する現象を指す。特異性には、個々の方程式が持つ特性が顕著に現れるため、特異性を調べることは方程式に潜む新たな現象や法則を解明することになる。本研究においては、主に空間次元が11次元など高次元の場合の特異性の発生について解析した。従来までの理論を拡張し、より広いクラスの非線形問題を扱うことで、これまでには見られなかった新しい特異性を持つ解をみつけた。

研究成果の概要(英文)：We studied the mechanism of singularities for nonlinear diffusion equations. Since singularities include much information about the character of each equation, we can understand new phenomenons hidden in the equation. In this study, we focused on singularities appearing in diffusion equations for a higher dimension. We extended conventional theories and treated wide class of nonlinear problems. Consequently, we found a new type of singularity.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：爆発問題 非線形熱方程式 同時・非同時爆発 日自己相似爆発

1. 研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式では、時間経過とともに解に特異性が生じることがある。これは非線形効果によって解が強く変形されるために起こる現象である。その典型的なものは、解自身の値が無限大に発散する爆発現象である。常微分方程式 $x' = x^2$ などがその簡単な例を与える。解の特異性には、個々の方程式が持つ特性が顕著に現れるため、特異性を調べることで方程式に潜む新たな現象や法則を解明することが可能となる。そのため『どのように爆発するか』という問題が重要になる。この問題に対して、儀我氏・コーン氏の一連の論文(1980年代)が一つの答えを与えた。その中で彼らは、方程式の持つスケール対称性が爆発時における解の振る舞いを決定する要因であることを明らかにし、その定式化を行った。その後、メルル氏・ザグ氏らをはじめとする研究者によってより洗練されたものに改良され様々な方面に応用された。

一方ヘレロ氏・ペラスケス氏(1994年)によって、空間次元が1次元以上の場合に上述の論文では説明できない本質的に性質の異なる爆発が存在することが示された。これは空間次元が高くなるにつれて、非線形方程式の解のダイナミクスが複雑化していくことを意味している。この研究以降、空間次元や非線形強度と爆発の関係性についての研究が現在に至るまで数多くなされてきた。しかし、それらの研究は球対称性など条件を課したものが多く、より広いクラスの非線形問題を理解するには不十分である。これらを踏まえ、連立方程式系など従来の理論では扱うことのできなかった非線形問題に対して、爆発の機構を解明するための理論構築が必要だと考え、本研究を行うに至った。

2. 研究の目的

本研究では、より広いクラスの非線形問題における爆発現象の解明を目指して、以下に挙げる二つの具体的な問題に取り組んだ。これら二つの問題に対して、爆発時における漸近挙動の解析手法を改良・再構築し、空間次元や非線形強度と解のダイナミクスとの関係性を解明することを目的とした。ここで得られた手法や結果を従来のものと照らし合わせ、それらの相違点を明らかにしていく。

(1) 複素数に値をとる二次の非線形項をもつ熱方程式では、グオ氏・二宮氏らの研究(2013年)によって、解を複素化することで爆発解が不安定化することが報告されていた。これは単独の方程式の場合には見られない現象である。応募者はこの論文を踏まえ、連立方程式系特有の爆発にはこれ以外にどのようなものがあるのかという問いを立て、この問いに対する発見的考察とその理論構築を目指した。その中でも、爆発時において連立方程式系の各成分同士が互いにどのように影響し合うのかという点に着眼した。

(2) 境界上に非線形性をもつ熱拡散方程式では、方程式の空間非対称性から球対称解は存在しない。そのため、従来の解析手法が適用できず、空間次元が高い場合や非線形が強い場合の爆発についてはほとんど何もわかっていなかった。そこでまずは、ヘレロ氏・ペラスケス氏の理論を改良・拡張し、本問題においてどのような爆発が起こり得るのかを調べた。

3. 研究の方法

研究の目的で述べた二つの方程式に対して、以下の(1)～(3)の内容に取り組んだ。その解析方法は、まずは各方程式が持つ固有の現象に対する発見的考察(形式レベルの接合漸近展開など)を行い、それを数学的に定式化するという手順をとった。数学的定式化においては、従来の単独の方程式の理論と比較しながら、できるだけ広いクラスの非線形問題に適用できるように従来の理論を拡張し整備した。

(1) 複素数に値をとる半線形熱方程式の爆発点の特徴付けを行った。上述にあるように、解を複素化することで爆発解が不安定化するが、この性質をより詳細に観察し応用した。爆発点を調べるためには漸近挙動の解析が不可欠であり、その際には従来の単独の方程式に対する理論を幾つか応用した。

(2) 複素数に値をとる半線形熱方程式の同時・非同時爆発の解明を行った。これまでも連立方程式系における同時・非同時爆発の研究はあったものの、その機構が比較的わかりやすいものが多かった。ここでは連立系にしたことで生じるより複雑な機構をもつ爆発について考察した。従来の単独の方程式に対する理論を拡張し、連立系における爆発解の漸近挙動を解析した。

(3) 非線形境界条件下での熱拡散方程式における空間高次元の場合の爆発解の漸近挙動を解析した。空間高次元の場合には、非球対称性を本質的に扱うことが不可欠であるが、その点が克服できていなかったため、爆発については何もわかっていなかった。そこで本研究では、解を球対称部分とそれ以外の部分に分けて考え、球対称部分については従来の理論を応用し、残りの部分については新たな解析を行った。

4. 研究成果

上記の研究の方法に沿って述べる。

(1) 複素数に値をとる解に対して、爆発点の位置が解の虚部の零点を用いて特徴付けできることを示した。これはグオ氏・二宮氏らの研究の局所版に対応するもので、彼らの論文の中で示された本質的な性質だけ抜き出したものである。この結果は、二成分系として爆発が起きているものの、爆発点において虚数成分はその値が0になっているという点で、複素化された方程式の解の爆発は非常に繊細であることを意味している。そのため

増大度評価などの基本的な性質についても未だわかっていないことが多い。

(2) 複素数に値をとる半線形熱方程式に対して、二種類の同時・非同時爆発解の構成に成功した。従来までの同時・非同時爆発についての研究と比べると、一つの方程式系において同時・非同時爆発が両方とも現れるという点で新しい。まず一つ目の爆発については、常微分方程式の解に摂動を加え、摂動パラメータを調節するという手法を用いた。この手法自体は標準的であるが、定式化の段階で連立系を考慮した新たな接合公式を導いた点が新しい。更にこの爆発解の各成分の形状と増大度を調べることで同時爆発と非同時爆発を分類した。二つ目の爆発は、空間高次元特有の問題を扱った。連立系ではある種の単調性が成立しないため、空間高次元の解析は困難であったが、本研究ではこの点を克服することができた。それは解の単調性定理(比較定理)について、その(適当な条件下での)局所版を得ることができたためである。この手法は連立系を扱うときに便利な道具になると期待できる。

(3) 非線形境界条件下での熱拡散方程式において、空間高次元の場合の定常解構造を明らかにし、その性質を応用することで、空間高次元における爆発解を構成することに成功した。まず定常解の研究において、非線形強度を変化させていくとある臨界値が存在し、その臨界値を境に定常解の解構造が変化することを示し、更に交点数についても調べた。優臨界問題の非球対称解に対して、定常解構造を明らかにした点が新しい点である。ここでの手法は、一般の非球対称な問題に対しても応用可能であり、安定性解析において新たな解析手法を与えている。続いてこの定常解の安定性定理とヘレロ氏・ベラスケス氏の理論を組み合わせ、非球対称な爆発解を構成した。本研究の核心部は、定式化において解を球対称部分とそれ以外の部分に分けて考察した点にある。ここでの理論は、従来の冪乗型非線形熱拡散方程式を含むより広いクラスの方程式に適用可能であり、これまで扱えなかった空間高次元の爆発問題の解析において新たな解析手法を提示している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計7件)

1. Junichi Harada, Construction of type II blow-up solutions for a semilinear parabolic system with higher dimension, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 査読あり, Vol. 56, No. 4, 2017, <http://dx.doi.org/10.1007/s00526-017-1213-x>
2. Junichi Harada, Nonsimultaneous blowup for a complex valued semilinear

heat equation, Journal of Differential Equations, 査読あり, Vol. 263, No. 8, 2017, pp. 4503-4516

3. Junichi Harada, Blow-up sets for a complex-valued semilinear heat equation, Journal of Evolution Equations, 査読あり, vol. 17, No. 2, 2017, pp. 849-867
4. Junichi Harada, Blowup profile for a complex valued semilinear heat equation, Journal of Functional Analysis, 査読あり, Vol. 270, No. 11, 2016, pp. 4213-4255x
5. Junichi Harada, Blow-up behavior of solutions to the heat equation with nonlinear boundary conditions, Advances in Differential Equations, 査読あり, Vol. 20, No. 1-2, 2015, pp. 23-76
6. Junichi Harada, Positive solutions to the Laplace equation with nonlinear boundary conditions on the half space, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 査読あり, Vol. 50, No. 1-2, 2014, pp. 399-435
7. Junichi Harada, Non self-similar blow-up solutions to the heat equation with nonlinear boundary conditions, Nonlinear Analysis, 査読あり, Vol. 102, 2014, pp. 36-83

〔学会発表〕(計11件)

- (1) 原田潤一, Blowup profile for a heat equation with a nonlinear boundary condition, 第150回神楽坂解析セミナー、東京理科大学、2017年7月22日
- (2) Junichi Harada, Exact blow-up profile for a heat equation with a nonlinear boundary condition, RIMS 偏微分方程式の形状解析、京都大学数理解析研究所、2017年6月5日~7日
- (3) 原田潤一, Boundary behavior for solutions of the heat equation with a nonlinear boundary condition, 日本数学会 2017 年度会、首都大学東京、2017年3月24日~27日
- (4) 原田潤一, Type II blowup solutions for a semilinear parabolic system, 第34回九州における偏微分方程式研究集会、九州大学、2017年1月30日~2月1日
- (5) Junichi Harada, Type II blow-up for semilinear parabolic systems, 7th Euro-Japanese Workshop on Blow-up、ベドロヴォ、2016年9月5日~9日
- (6) Junichi Harada, Simultaneous and nonsimultaneous blow-up for a semilinear parabolic system in higher dimension, 3rd Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDE、大阪大学、2015年12月8日~11日

- (7) 原田潤一、複素数値半線形熱方程式における非同時爆発の可能性について、日本数学会 2015 年度年会、明治大学、2015 年 3 月 21 日～24 日
- (8) 原田潤一、Blow-up points for a semilinear complex-valued heat equation、第 23 回なかもず解析セミナー、大坂府立大学、2014 年 11 月 28 日
- (9) 原田潤一、複素数に値をとる半線形熱方程式の爆発点について、第 5 回拡散と移流の数理、九州大学西新プラザ、2014 年 11 月 22 日
- (10) 原田潤一、ある非線形熱方程式系の爆発点について、2014 年度 日本数学会 秋季総合文科会、広島大学、2014 年 9 月 25 日～28 日
- (11) 原田潤一、ある非線形熱方程式系の爆発点について、東北大学応用数学セミナー、東北大学、2014 年 6 月 12 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

原田 潤一 (Junichi Harada)

秋田大学・教育文化学部・准教授

研究者番号：00580169