

令和元年5月29日現在

機関番号：13903

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2018

課題番号：26800067

研究課題名(和文)多成分プラズマの境界層に関する数学解析

研究課題名(英文)Mathematical analysis on boundary layers of multicomponent plasmas

研究代表者

鈴木 政尋 (Suzuki, Masahiro)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30587895

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：プラズマが固定壁に接触する周囲には、境界層(シース)が現れる。H. Bohm は、電子と単一種類の正イオンで構成されるプラズマを考察し、シースが形成されるための条件(Bohm 条件)を導いた。また、K.-U. Riemann は、電子と多種類の正イオンで構成されるプラズマを考察し、一般化された Bohm 条件を提案した。これらのプラズマの運動は Euler-Poisson 方程式(以下、EP 方程式と略す)を用いて記述でき、シースは EP 方程式の定常解であると理解できる。本研究では、これらの Bohm 条件の下で定常解の存在と安定性を解析した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

EP 方程式から形式的に導出された Bohm 条件に対して、数学的に厳密な正当性を与えるなど、シースに関する数学理論を完成させることはシース現象の理解を深める助けとなる。また、EP 方程式は双曲・楕円型連立方程式系に分類されるが、半導体中の電子流、熱輻射気体、自己重力をもつガス惑星などの現象を記述するモデルも双曲・楕円型連立系である。本研究で得られた解析手法は他のモデルにも応用可能であり、これらの数理物理モデルを一般化した双曲・楕円型連立系の数学理論を構築する契機となる。

研究成果の概要(英文)：A boundary layer called a sheath appears around the wall where the plasma contacts. H. Bohm considered a plasma composed of electrons and a single kind of positive ion, and derive the Bohm condition for the formation of a sheath. Furthermore, K.-U. Riemann considered a plasma composed of electrons and various positive ions, and proposed the generalized Bohm condition. The motions of these plasmas can be described by the Euler-Poisson equation, and it can be understood that the sheath is a steady solution of the equation. We analyzed the existence and stability of the stationary solution under those Bohm conditions.

研究分野：関数方程式

キーワード：シース Bohm条件 Euler-Poisson方程式 定常解 3次元円環領域 摂動半空間

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

プラズマとは電子と正イオンから構成される気体の一種である。プラズマが接触する固定壁付近には境界層（シース）が形成される。具体的には、プラズマが壁に接触するとき、プラズマ中の電子と正イオンは壁に流れ込むが、正イオンと比べて電子の質量は遥かに小さく移動しやすいために、電子が過剰に壁に到達して電位が負となる。負の電位は電子を反射し、正イオンを加速させて、電子とイオンの粒子束が等しくなるようにプラズマと壁の間に電界を形成させる。このプラズマと壁の間の領域がシースと呼ばれている。プラズマ物理学では EP 方程式を用いた形式的な議論により、シースが形成されるための条件として Bohm 条件が提案されている。この条件は、正イオンが極超音速でプラズマ領域からシース領域に流れ込む必要があることを意味する。

電子と単一種類の正イオンで構成されるプラズマについては、1950 年頃に H. Bohm により Bohm 条件が導出されている。一方、工学で応用されるプラズマの多くは、電子と複数種類の正イオンが混在する多成分プラズマであり、K.-U. Riemann はこの多成分プラズマに対して一般化された Bohm 条件を導いている(引用文献)。多成分プラズマでは、正イオンは自身が持つ正電荷により電場に変化を与え、その電場を経由して他種類の正イオンの運動に影響を及ぼす。よって、多種類の正イオン間には複雑な相互作用が働くことになる。そのため、一般化された Bohm 条件は、各種類の正イオン速度それぞれに一義的な条件を課すのではなく、全種類の正イオン速度が関連する一つの不等式で与えられる。

電子と単一種類の正イオンで構成されるプラズマの EP 方程式を用いて、シースの形成を議論した数学的成果は幾つか報告されている。シースは定常的な境界層と観測されるため、数学的には時間的に安定な定常解であると理解できる。A. Ambroso 等は、Bohm 条件を仮定して次元有界区間上で定常解の存在を示している。さらに、同氏は時間発展問題の解が時間経過とともに定常解に収束することを数値シミュレーションで確認している。申請者は次元半空間上で EP 方程式に定常解が存在するための必要十分条件を導き Bohm 条件よりやや強い条件下で定常解の安定性を証明している(引用文献)。その後、申請者等は Bohm 条件下で安定性を示すことに成功している(引用文献)。文献では、多次元半空間において一次元的な平面定常解の安定性を示している。

工学的な側面を考慮するならば、境界が平面とならない領域において、多成分プラズマのシース形成を解析することがより重要な問題となる。

### <引用文献>

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa and Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equation arising in plasma physics, SIAM Math. Anal. 44 (2012), 761-790.

K.-U. Riemann, The Bohm Criterion and Boundary Conditions for a Multicomponent System, IEEE Transactions on Plasma Science 23 (1995), 709-716.

Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics, Kinetic and Related Models 4 (2010), 569-588.

### 2. 研究の目的

本研究では、比較的取り扱い易い、半空間の摂動として与えられる領域（摂動半空間）などで、渦なしの流れを持つ定常解の一意的存在と安定性を示すことを目的とした。より具体的には、次の4つを研究目標とした。

- (1) **【研究1】多次元半空間における多成分プラズマに対する平面定常解の安定性解析**  
多次元半空間において多成分プラズマの運動を記述する EP 方程式を取り扱う。次元半空間上で定常解は既に構成されているが、この定常解を多次元半空間に埋め込むと、一次元的な流れを持つ平面定常解となる。この研究では、一般化された Bohm 条件は平面定常解が時間的に漸近安定であるための十分条件であることを明らかにする。
- (2) **【研究2】単一種類の正イオンからなるプラズマの摂動半空間上の解析 I: 渦なし定常解の構成**  
先に述べた通り、境界が平面とならない領域でのシースの解析が工学的にはより重要となる。次元摂動半空間において、単一種類の正イオンからなるプラズマの EP 方程式の定常解を構成する。正イオン速度に渦なしの条件を仮定すれば、速度はスカラーポテンシャル関数を用いて記述でき、問題が簡略化される。さらに無限遠方で Bohm 条件を課して、渦なしの流れを持つ定常解の存在を示す。
- (3) **【研究3】単一種類の正イオンからなるプラズマの摂動半空間上の解析 II: 渦なし定常解の安定性**  
【研究2】で構成した定常解の安定性解析を行う。半空間に加える摂動を十分小さく取れば、渦なし定常解は平面定常解に近いことが期待できる。まずは摂動半空間の摂動が小さ

いことを仮定し、渦なし定常解の時間的な漸近安定性を証明する．さらに、摂動に関する条件の改善も試みる．

- (4) 【研究 4】 摂動半空間における多成分プラズマに対する渦なし定常解の存在と安定性  
摂動半空間において多成分プラズマの運動を記述する EP 方程式の解析に取り組む．一般化された Bohm 条件は、渦なし定常解の存在と安定性を保証する十分条件であることを解明する．

### 3．研究の方法

研究目標毎に、それぞれ方法を述べる．

- (1) 【研究 1】 申請者の研究(引用文献[2])で使用した、指数関数の重みをつけたソボレフ空間を用いる手法を用いた．実際、線形化した EP 方程式のスペクトルの実部は零ではあるが、線形化方程式に指数関数をかけた方程式系のスペクトルの実部は負になる．一方、多成分プラズマでは多種類の正イオンの間に複雑な相互作用が働くが、この相互作用はフーリエ空間では代数方程式を用いて表せる．この性質を利用するため、奇関数拡張を用いて半空間から全空間に問題を帰着させ、さらにフーリエ空間上のエネルギー法を援用し、正イオン間の相互作用に対する適切な評価の導出した．

- (2) 【研究 2】 当初の計画では、三次元半空間にコンパクトな摂動を加えた摂動半空間上で、Bohm 条件を仮定して多次元的な流れを持つ定常解を構成する予定であった．しかし、研究を進めていくうちに、Bohm 条件だけでは不十分であることが明らかになった．実際、摂動半空間よりさらに扱い易い 3 次元円環領域において球対称定常解を解析すると、定常問題が可解となるためには、Bohm 条件より強い条件が必要であることが分かった．

そのような Bohm 条件より強い条件だけでは、EP 方程式の運動量保存則をうまく取り扱えないため、渦なしの流れを持つ定常解の構成に焦点を絞った．実際、渦なし条件を仮定すれば、正イオン速度はスカラーポテンシャル関数の勾配で記述でき、運動量保存則は超越方程式に変形される．この超越方程式を用いれば、正イオン密度をポテンシャル関数および電位で表現する関係式が得られる．最終的に、定常 EP 方程式はポテンシャル関数と電位のみを未知関数とする問題に帰着できる．このアイデアは当初から着想していたものであるが、この方法を用いると正イオンの速度に関して必要以上の条件を仮定しなければならず、新たなアプローチを模索した．

まず平面定常解からの摂動を新たに未知関数として EP 方程式を書き直す．この際、書き直した方程式は非斉次となるが、仮に非斉次項を零とした方程式では、【研究 1】で使用した指数関数の重みをつけたソボレフ空間において消散構造を得られる．この構造を利用して、時間大域解を構成した．ここで、Bohm 条件だけでなく、ある必要条件も仮定している．この時間大域解において、時間を無限大とした極限関数が、定常解となるはずである．実際、任意の時間幅を取り、その整数倍をシフトした時間大域解が、ある時間周期解に収束することを示し、さらに時間幅の任意性から時間周期解は定常解であることを証明した．

- (3) 【研究 3】 時間幅の整数倍をシフトした時間大域解と元の時間大域解の差は、時間経過とともに指数関数的に収束することが証明できる．一方、整数を無限大とすれば、シフトした時間大域解定常解に収束する．これらの事実を用いて、定常解の安定性を証明した．

- (4) 【研究 4】 【研究 1】 から【研究 3】 で開発された解析手法を基にして、三次元摂動半空間上で多成分プラズマの EP 方程式の定常解の存在と安定性を示す予定であった．現在、順調に研究を進めているものの、完全な解決には至らず、今後もこの研究を継続し完成させる．

### 4．研究成果

研究目標毎に、それぞれ成果を述べる．

- (1) 【研究 1】 指数関数の重みをつけたソボレフ空間と奇関数拡張を併用して、多次元半空間において一般化された Bohm 条件を仮定し、多成分プラズマの運動を記述する EP 方程式の時間大域解が時間経過とともに平面定常解に収束することを証明した．この成果は、一般化されたボーム条件に対して数学的に厳密な正当性を与え、シース現象の理解を深める助けとなる．

- (2) 【研究 2】 三次元半空間にコンパクトな摂動を加えた摂動半空間上で、Bohm 条件およびある必要条件を仮定して、多次元的な流れを持つ定常解の構成に成功した．ここで開発した手法は、他の圧縮性流体モデルにも使用できる．実際、Navier-Stokes 方程式について

も同様な結果を得ることができた。圧縮性流体モデルの数学解析では、多次元的な流れを持つ定常解の解析は重要な問題であると認識されているが、その難しさから敬遠されており、圧縮性流体モデルの数学解析の発展に貢献できるであろう。また、Bohm 条件に加えて条件が必要となることを発見したことは、プラズマ物理学の観点から興味深いだろう。

(3) 【研究 3】 【研究 2】で構成した定常解の安定性を示した。その際に用いた解析方法は Navier-Stokes 方程式などに応用でき、大きな波及効果を期待できる。

(4) 【研究 4】上述の通り解決には至らず、今後もこの研究を継続し完成させる。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 12 件)

Masahiro Suzuki, Bifurcation analysis of an equation for gas discharge, Proceedings of the 2018 International Conference on Hyperbolic Problems, (2019), 印刷中, 査読有

Masahiro Suzuki and Atusi Tani, Time-local solvability of the Degond--Lucquin-Desreux--Morrow model for gas discharge, SIAM Math. Anal., Vol.50 (2018), pp.5096-5118, 査読有

<https://doi.org/10.1137/17M111852X>

Toru Kan and Masahiro Suzuki, Uniform estimates and uniqueness of stationary solutions to the drift-diffusion model for semiconductors, Applicable Analysis (2018), published online, 査読有

10.1080/00036811.2018.1460820

Masahiro Suzuki, Bifurcation analysis of an equation for gas discharge, RIMS Kokyuroku, Vol.2070 (2018), pp.17-24, 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2070.html>

Masahiro Suzuki, Stability analysis and quasi-neutral limit for the Euler-Poisson equation, RIMS Kokyuroku, Vol.2066 (2018), pp.136-145, 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2066.html>

Chang-Yeol Jung, Bongsuk Kwon and Masahiro Suzuki, Quasi-neutral limit for the Euler-Poisson system in the presence of plasma sheaths with spherical symmetry, Math. Models Methods Appl. Sci., Vol.26 (2016), pp.2369-2392, 査読有

<http://dx.doi.org/10.1142/S0218202516500561>

Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of a boundary layer to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, Kinetic and Related Models, Vol.9 (2016), pp.587-603, 査読有

10.3934/krm.2016008

Toru Kan and Masahiro Suzuki, Existence and stability of time-periodic solutions to the drift-diffusion model for semiconductors, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica New Series, Vol.10 (2015), pp.615-638, 査読有

[https://web.math.sinica.edu.tw/bulletin\\_ns/20154/2015406.pdf](https://web.math.sinica.edu.tw/bulletin_ns/20154/2015406.pdf)

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa and Masahiro Suzuki, The mathematical justification of the Bohm criterion in plasma physics, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol.64 (2015), pp.489-495, 査読有

<https://projecteuclid.org/euclid.aspm/1540934197>

Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, RIMS Kokyuroku, Vol.1905 (2014), pp.180-187, 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1905.html>

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa and Masahiro Suzuki, Nonlinear stability of boundary layer solutions to the Euler-Poisson equations in plasma physics, AIMS Series on Applied Mathematics, Vol.8 (2014), pp.817--822, 査読有

<https://www.aims sciences.org/book/AM/volume/Volume%208>

鈴木政尋, Bohm のシース条件の数学解析, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1885 (2014), pp.116-122, 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1885.html>

[学会発表](計 24 件)

Masahiro Suzuki, Bifurcation analysis of an equation for gas discharge, The 17th International Conference on Hyperbolic Problem, Penn State University,

2018

Masahiro Suzuki, Bifurcation analysis of an equation for gas discharge, 2nd Workshop on Recent development of mathematical fluid dynamics and hyperbolic conservation laws, Pukyong National University, 2018.

Masahiro Suzuki, Quasi-neutral limit for the Euler-Poisson system, 2017 Taiwan-Japan Workshop on Dispersion, Navier Stokes, Kinetic, and Inverse Problems, National Cheng Kung University, 2017.

Masahiro Suzuki, Quasi-neutral limit for the Euler-Poisson system, The 6th Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Osaka University, 2017.

Masahiro Suzuki, Mathematical analysis of plasma boundary layers, 2017 NCTS PDE Workshop on Fluid Dynamics and Related Problems, National Taiwan University, 2017.

Masahiro Suzuki, Bifurcation analysis of an equation for gas discharge, Ito workshop, Kyushu University, 2017.

Masahiro Suzuki, Bifurcation analysis of an equation for gas discharge, 19th RIMS workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics, RIMS Kyoto University, 2017.

Masahiro Suzuki, Stability analysis and quasi-neutral limit for the Euler-Poisson equations, International Workshop on Multidimensional Conservation Laws and Related Problems, Shanghai Jiao Tong University, 2017.

Masahiro Suzuki, Time-periodic solutions to the drift-diffusion model for semiconductors, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Hyatt Regency Orlando, 2016.

Masahiro Suzuki, Stability analysis and quasi-neutral limit for the Euler-Poisson equations, Theory of evolution equations and applications to nonlinear problems, RIMS Kyoto University, 2016.

鈴木政尋, 気体放電のモデル方程式の時間局所可解性, 現象解析特別セミナー第9回, 茨城大学, 平成28年

Masahiro Suzuki, Time-periodic solutions to the drift-diffusion model for semiconductors, Fifth China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Wuhan University, 2015.

Masahiro Suzuki, The hierarchy of models for semiconductors, Nonlinear Partial Differential Equations, Unipark, Jeju National University, 2015.

Masahiro Suzuki, Mathematical analysis of the generalized Bohm criterion, Recent development of mathematical fluid dynamics and hyperbolic conservation laws, National Institute for Mathematical Science, 2015

鈴木政尋, 一般化された Bohm 条件の数学的検証, 流体力学会, 東京工業大学, 平成27年.

鈴木政尋, 半導体の Drift-diffusion model の時間周期解について, 日本数学会, 京都産業大学, 平成27年

Masahiro Suzuki, Stability of boundary layer solutions of the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, International Conference on Nonlinear Analysis: Boundary Phenomena for Evolutionary PDE, Academia Sinica, 2014.

Masahiro Suzuki, Large time behavior of solutions to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, Ito Workshop on Partial Differential Equations, Kyushu University, 2014.

Masahiro Suzuki, Boundary layers to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, The 15th International Conference on Hyperbolic Problem, Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada, 2014.

Masahiro Suzuki, Stationary solutions to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, The Summer Workshop on Kinetic Theory and Gas Dynamics, Stanford University, 2014.

21 Masahiro Suzuki, Boundary layers to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, The Universidad Autonoma de Madrid, 2014.

22 Masahiro Suzuki, Boundary layers to the Euler-Poisson equations for a multicomponent plasma, Workshop on Nonlinear PDEs, Ulsan National Institute of Science and Technology, 2014.

23 鈴木政尋, 多成分プラズマの運動を記述するオイラー・ポアソン方程式の定常解, 第3回岐阜数理科学研究会, 飛騨高山まちの博物館, 平成26年.

24 鈴木政尋, 多成分プラズマの数学解析について, 現象解析特別セミナー第6回, 東京理科大学, 平成26年.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://suzuki.web.nitech.ac.jp/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：高山 正宏

ローマ字氏名：Masahiro Takayama

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。