

平成 30 年 5 月 31 日現在

機関番号：17201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800070

研究課題名(和文)可積分系の高次非線形分散型方程式に対する初期値問題の適切性と漸近挙動

研究課題名(英文)Cauchy problem for nonlinear dispersive equations and integrable systems

研究代表者

加藤 孝盛(Kato, Takamori)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：50620639

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：可積分系である5次KdV方程式及び5次修正KdV方程式に対する初期値問題を周期境界条件下で考え、その適切性を解明した。本研究では線形化方程式の解の摂動として捉えられない非線形相互作用が集中する共鳴部分の解析が鍵となる。そこで、可積分性の代数的構造を上手く利用することで、共鳴部分の明示的な表示を与え、複数個の保存則を用いた非線形変換により相殺することに成功した。また残りの部分が normal form 法により、線形の摂動と捉えることができ、適切性が得られた。本研究において調和解析的手法と可積分性の代数的な性質を同時扱える手法を構築したことが最も独創的な点である。

研究成果の概要(英文)：We studied the well-posedness for the Cauchy problem of the periodic fifth order KdV equation and fifth order modified KdV equation which are completely integrable. In this study, the key idea is how to analysis the resonant parts in which the strongest nonlinear interaction concentrates. We succeeded in giving the explicit formula of the resonant parts and cancelling them by using the algebraic structure of integrable systems. Moreover, since the nonlinear terms except resonant parts were able to be regarded as the perturbation of the linearized solutions, we proved the well-posedness and unconditional uniqueness in wide function spaces.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形分散型 初期値問題 適切性 調和解析 可積分系

## 1. 研究開始当初の背景

非線形分散型方程式に対する初期値問題の適切性(解の一意存在・初期値に対する連続依存性)及び解の漸近挙動の研究は、ここ 30 年間で大きな進展を遂げている。1980 年代には分散効果を引き出す線形型評価が改良され、それが非線形方程式に応用された。しかし、この手法では線形化方程式の解の近似(線形の摂動)とみなせる非線形項しか取り扱うことはできなかった。1990 年代に入ると Bourgain の Fourier 制限法や Shatah らの normal form 法が開発され、線形化方程式の解が性質と対称性など非線形項の持つ幾何学的な構造を同時扱えるようになった。これらの研究を通じて、解の滑らかさを悪くし、解の時間減衰を遅くなる非線形相互作用は共鳴部分に集中することが分かってきた。そのため、線形摂動から外れた真の非線形性を取り扱うためには、共鳴部分の特徴を正確に捉えることが重要になる。

## 2. 研究の目的

線形摂動としては捉えられない強い非線形性を持つ非線形分散型方程式の初期値問題の適切性を解明する。この研究では、最も特異性が強い非線形相互作用が集中する共鳴部分の解析が重要になる。独自のこれまでの研究から、対象となる非線形分散型方程式がある種の対称性を持っていれば、その性質を利用することにより共鳴部分を明示的に局在化され、相殺することが可能であり、残りの相互作用は線形の摂動として捉えられるという着想に至った。このアイデアに基づき、KdV 方程式などの可積分系とよばれる高い対称性を持つ非線形分散型方程式を対象をしぼり、調和解析の手法に可積分系の性質を上手く取り入れることで、一見強い特異性を持つ非線形分散型方程式の適切性を解明することが目的である。

## 3. 研究の方法

可積分系の KdV 階層、修正 KdV 階層及びシュレディンガー階層に属する非線形分散型方程式の初期値問題の適切性を周期境界条件下で考える。これらは線形摂動の枠組みを超えた非線形性を持つ非線形分散型方程式であり、共鳴部分を具体的に記述することが最も重要となる。そこで可積分系の対称性を上手く利用することにより、問題となる共鳴部分は、強く局在化され、明示的に表現する。そして、共鳴部分以外の非線形相互作用は、周波数領域において振動するため、分散効果を持つことが期待できる。それを Fourier 制限法及び normal form 法で引き出し、線形の摂動として捉えられることを示す。

## 4. 研究成果

(1) 可積分系である 5 次 KdV 方程式、5 次修正 KdV 方程式及び 4 次シュレディンガー方程式に対する初期値問題の周期境界条件下で考え、その適切性を解明した。これらの非線形方程式の解写像が、線形摂動とは本質的なずれが存在することが問題となる。このずれが生じる原因となる共鳴部分を可積分性の代数的構造を上手く利用することで、明示的な表示を与え、それを複数個の保存則を用いた非線形変換により相殺することに成功した。また残りの部分の非共鳴部分が normal form 法により分散効果を引き出すことにより、線形の摂動となることがいえ、時間局所適切性が得られた。ここで得られた非線形評価は非常に精密であるため、共鳴部分以外の非線形項を線形近似で捉えられる臨界の正則性で適切性及び無条件一意性を証明できた。ここで無条件一意性とは、何らかの補助空間との共通部分ではなく、解を定義する上で最も自然な連続

空間で解の一意性が従うこといい、それは一意性が解の構成法に依存しなことを意味する。この研究において非線形分散型方程式の解析の軸である調和解析的手法に可積分性の代数的な性質をとりこめたことが最も独創的な点である。なお、本研究は中央大学の津川光太郎氏との共同研究である。

- (2) (1)の研究で構築した手法では非常に精密な非線形評価が得られるため、Brown運動(Wiener測度)が定義できるような広い関数空間で時間局所適切性を得ることができる。この事実とBourgainが1994年に構築した確率論的手法を応用することによって、Gibbs測度を構成することができ、それが不変測度になっていること及び(1)の研究で構成した時間局所解を測度がゼロになる集合を除いて時間大域的に延長することに成功した。またそれと同時に解軌道の回帰性もいえるため、時間発展した解の挙動に関する力学系の情報を得ることができた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

1. Takamori Kato, 'Unconditional well-posedness of the fifth order KdV type equations with periodic boundary condition', RIMS Kokyuroku Bessatsu, to appear, 査読あり

[学会発表](計11件)

1. Takamori Kato, 'Almost sure global well-posedness for fourth order Schrodinger type equations on the torus', Workshop on Hyperbolic and Dispersive PDEs in Fukuoka, 九州大学, 2018年2月.
2. Takamori Kato, 'Well-posedness in low regularity of fifth order mKdV type equations with periodic boundary condition', 2017 Taiwan-Japan Workshop on Dispersion, Navier-Stokes, Kinetic and Inverse Problem, 国立成功大学(台湾), 2017年12月.
3. Takamori Kato, 'Local well-posedness

in low regularity of fifth order KdV type equations with periodic boundary', Ito Workshop on Partial Differential Equations, 九州大学, 2017年8月.

4. Takamori Kato, 'Unconditional Well-posedness of fifth order KdV type equations with periodic boundary condition', RIMS 研究集会「Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations」, 京都大学数理解析研究所, 2017年7月.
5. 加藤 孝盛, 'Local well-posedness in low regularity of fifth order KdV type equations with periodic boundary', 研究集会「第4回神楽坂非線形波動研究会」, 東京理科大学, 2017年6月.
6. Takamori Kato, 'Well-posedness of fifth order KdV type equations with low regularity data', German-Japanese Workshop on PDEs, University of Konstanz(ドイツ), 2017年3月.
7. 加藤 孝盛, 'On invariant Gibbs measure for fourth order type Schrodinger type equations', 研究集会「若手のための偏微分方程式と数学解析」, 福岡大学, 2017年2月.
8. 加藤 孝盛, 'Local well-posedness in low regularity of fifth order KdV type equations with periodic boundary condition', 研究集会「非線形の諸問題」, かんぼの宿 湯田, 2016年9月.
9. Takamori Kato, 'A cancellation property and well-posedness of fifth order KdV type equations on the torus', Korean-Japan Workshop on Nonlinear PDEs, Ulsan National Institute of Science and Technology(韓国), 2015年12月.
10. Takamori Kato, 'A cancellation property and well-posedness of fifth order modified KdV equations on the torus', International Workshop on 'Fundamental Problems in Mathematics and Physics', 早稲田大学, 2015年10月.
11. Takamori Kato, 'A cancellation property and well-posedness of fifth order modified KdV type equations on the torus', 研究集会「Nonlinear Evolution Equations and Related Topics」, 京都大学, 2015年3月.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

加藤 孝盛 (KATO, Takamori)

佐賀大学・大学院工学系研究科・講師

研究者番号：50620639