

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：12701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800073

研究課題名(和文) Stokes方程式における領域摂動問題とその応用

研究課題名(英文) Domain perturbation problem for the Stokes equations and its application

研究代表者

牛越 恵理佳 (Ushikoshi, Erika)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・講師

研究者番号：20714041

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究においては、ディリクレ境界条件を課したストークス方程式のグリーン関数と固有値に対するアダマル変分公式の導出を行った。その結果、体積保存しない一般の正則な摂動条件下において、速度場および圧力のグリーン関数の2次変分に対するアダマル変分公式の導出に成功した。さらに、ストークス方程式の多重度のある固有値に対する変分公式を構成することにも成功した。そして、その応用として、固有値の変分から領域の幾何学的特徴を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this research, our aim is to analyze the domain dependency of the Green function and the eigenvalues of the Stokes equations with the Dirichlet boundary condition. As a result, we succeeded to establish the Hadamard variational formula for the Green function for the velocity and pressure under the general second order domain perturbations. Moreover, we composed the variational formula for the multiple eigenvalues, and we succeeded to apply that formula to clarify the topological type of the domain.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：ストークス方程式 アダマル変分公式

### 1. 研究開始当初の背景

アダマール変分公式は、1908年にアダマールに提唱されて以来、領域摂動問題の数理解析的手法の重要な道具として、数多くの研究者により研究がなされてきた。ここで、アダマール変分公式とは、ある楕円型方程式のグリーン関数や固有値などの領域に依存して決まる関数が、領域の摂動に伴いどのような変化をするかを記述する公式である。同公式に関しては、特に、最も基本的な楕円型方程式であるラプラス方程式に対して、盛んに研究がなされてきた。実際に、Garabedian氏、Schiffer氏や小沢真氏等の一連の研究により、様々な境界条件下におけるグリーン関数や固有値に対するアダマール変分公式が、正則な摂動や位相同型でない摂動条件下において構成され、領域形状の最適化問題などへ応用が展開されてきた。

一方、楕円型方程式系の一つの例であるストークス方程式を題材にした領域摂動問題の考察は、その方程式の背景にある物理的意味から考えても、非常に重要な要素を含んでいるにも関わらず、数理解析における基礎研究からその応用に至るまで、殆どなされていないといっても過言ではない状況であった。近年になり、Kozono-Ushikoshi (Arch. Ration. Mech. Anal., 2013)により、体積を保存するような正則な摂動条件のもと、ディリクレ境界条件を課したストークス方程式の速度場に対するグリーン関数のアダマール変分公式が初めて導出された。以降、Ushikoshi (Manuscripta Math., 2015)等により変分公式の導出方法が具体的に整備され、速度場と圧力に対するグリーン関数の第2次変分公式の導出がなされている。

### 2. 研究の目的

ストークス方程式は、流体力学の基礎方程式として知られている。そこで、同方程式に対するアダマール変分公式を考察することで、流体力学への領域摂動問題に対する新しい数理解析的手法を確立することが、本研究の目的である。

そのために、まずは一般の正則な摂動条件下におけるストークス方程式のグリーン関数に対するアダマール変分公式の統一的な方法について言及し、導出の基礎的な方法論の確立を目指す。さらに、変分公式を用いた、領域の幾何学的特徴付けなどの応用について考察する。

### 3. 研究の方法

先行研究である Kozono-Ushikoshi (Arch. Ration. Mech. Anal., 2013) や Ushikoshi (Manuscripta Math., 2015) においては、「体積を保存する」ような正則な領域摂動のもと、ディリクレ境界条件を課したストークス方程式のグリーン関数に対するアダマール変分公式が得られている。そこで、本研究においては、まずは、ストークス方程式のグリー

ン関数に対する、高次変分公式導出のアルゴリズムを、領域の摂動条件の一般化へ応用し、変分公式の本質的構造を見出す。さらに、研究対象をグリーン関数のみに留めず、固有値についても考察を行う。具体的には、ストークス方程式の多重度をもつ固有値に対するアダマール変分公式の導出を行い、実際に、同変分公式から、「固有値の変分」と「領域の幾何学的特徴」の関係性について解析を行う。

### 4. 研究成果

学術論文(1)においては、ディリクレ境界条件を課したストークス方程式の多重度をもつ固有値に対するアダマール変分公式の導出を行った。ストークス方程式はラプラス方程式とは異なり、ある領域に対して、固有値の集合が定まるが、その固有値の集合に、固有空間の次元が1となるような値が含まれるような領域が存在するかどうかは未だ明らかになっていない。そのため、ストークス方程式の場合には、「多重度のある」固有値に対して考察を行うことが求められる。

関連する先行研究としては、ラプラス方程式について考察した Garabedian-Schiffer (J. Analyze Math., 1953)が挙げられるが、彼らは、固有値が単純であるという仮定を課して変分公式を導出しており、故にこの手法をストークス方程式の場合に適用することは出来ない。そこで、本研究においてはラプラス方程式の多重度のある固有値に対する考察を行った Jimbo-Kosugi (J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 2009)で用いられた手法を適用する。彼らは、近似固有関数の構成から、ミニマックス法を応用し、多重度のある場合も、摂動を加えた固有値が連続的に元の領域の固有値に収束することを明らかにした。この事実により、対応する固有関数の領域依存性を解析することが可能となる。あとは、固有値と固有関数双方の性質を用いることで、変分公式の表現を得ている。この手法をストークス方程式の場合に適用し、変分公式を得ることに成功した。

さらに、先行研究の Ushikoshi (Indiana Univ. Math. J., 2013)等においては、同方程式特有の非圧縮条件を保存するために、領域摂動に対して「体積保存」の条件を課していた。一方、(1)においては、piola変換を導入することにより、「体積保存」の条件を課さない一般の正則な領域摂動のもと、変分公式を導出することに成功した。

(1)は、初めてストークス方程式の多重度のある固有値に着目し、そのアダマール変分公式を導出した結果であり、意義深いといえる。

学術論文(2)では、ディリクレ境界条件を課した場合の、正則な領域の2次摂動に対するストークス方程式の速度場と圧力に対するグリーン関数の第2次までの表現公式の構

成に成功している．基本的なアイディアは，Ushikoshi (Manuscripta Math., 2015) で考察された高次変分公式を導出するためのアルゴリズムにあり，この手法を領域摂動条件に応用した結果である．(2)より，領域摂動の一般化の観点からみても，摂動した領域から固定領域へ引き戻したグリーン関数の第一変分と，元の領域上の固定点におけるグリーン関数の第一変分の各点での差が，変分公式の表現に大きく関係していることが明らかになった．

学術論文(3)においては，学術論文(1)で得られた変分公式の応用として，ディリクレ境界条件を課したストークス方程式の多重度をもつ固有値の変分から，領域の幾何学的特徴付けについて言及した．具体的には，体積を保存するような正則な摂動に対して，多重度のある固有値の変分が0になるような3次元有界領域が存在するならば，その領域はトーラスと同相であることを明らかにした．

(3)の鍵は，やはり(1)で得られ変分公式である．(1)の公式と，体積を保存した任意の正則な摂動に対して，固有値の変分が0になるという仮定から，固有関数の法線微分の長さが境界上で定数になることが，ただちに証明される．この事実と，領域のオイラー標数に着目することで，定理の主張は示される．

Miyakawa(preprint)では，特に固有値が単純の場合を考察しているが，議論の鍵となる(1)の公式は，単純の場合を含んでいる結果であるため，(3)は，単純固有値の場合も含んだ結果といえる．

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

(1) Jimbo, S., Ushikoshi, E., “Hadamard variational formula for the multiple eigenvalues of the Stokes operator with the Dirichlet boundary conditions”, Far East J. Math. Sci., 98(2015), 713-739, 査読有．

(2) Ushikoshi, E., “Hadamard variational formula for the Green function of the Stokes equations under the general second order perturbation”, J. Math. Soc. Japan, 68(2016), 1525-1557, 査読有．

(3) Jimbo, S., Kozono, H., Teramoto, Y., Ushikoshi, E., “Hadamard variational formula for eigenvalues of the Stokes equations and its application”, Math. Ann., 368(2017), 877-884, 査読有．

[学会発表](計 24 件)

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for the Green function of the Stokes equations”, 第 39 回偏微分方程式

論札幌シンポジウム，北海道大学，2014 年 8 月．

牛越恵理佳, “ストークス作用素の固有値に対するアダマル変分公式について”，日本数学会 2014 年秋季総合分科会，広島大学，2014 年 9 月．

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions”, 第 128 解神楽坂解析セミナー，東京理科大学，2014 年 10 月．

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions”, Autumn School and Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Bad Boll, Germany, 2014 年 10 月．

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for the Stokes equations”, RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」，京都大学，2014 年 11 月．

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions”, 偏微分方程式セミナー，北海道大学，2014 年 11 月．

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions”, 環瀬戸内ワークショップ，愛媛大学，2015 年 2 月．

牛越恵理佳, “ディリクレ境界条件を課したラプラス方程式のグリーン関数に対する高次アダマル変分公式について”，日本数学会 2015 年秋季総合分科会，京都産業大学，2015 年 9 月．

牛越恵理佳, “The application of the Hadamard variational formula for the Stokes equations”, International Conference, SPP 1506 Transport Processes at Fluidic Interfaces, IRTG 1529 Mathematical Fluid Dynamics, JSPS Program of the Japanese-German Graduate Externship, Darmstadt, Germany, 2015 年 10 月．

牛越恵理佳, “ディリクレ境界条件を課したラプラス方程式のグリーン関数に対する高次アダマル変分公式”，第 20 回さいたま数理解析セミナー，埼玉大学サテライトキャンパス，2015 年 11 月．

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for eigenvalues of the Stokes equations and its application”, 微分方程式の総合的研究，東京大学，2015 年 12 月．

牛越恵理佳, “ストークス方程式に対するアダマル変分公式”，第 8 回福島応用数学研究集会，コラッセ福島，2016 年 3 月．

牛越恵理佳, “Hadamard variational formula for the eigenvalues of the Stokes equations and its applicataion”，日本数

学会 2016 年度年会 ,筑波大学 ,2016 年 3 月 .

牛越惠理佳 , “ ストークス方程式の固有値に対するアダマル変分公式とその応用について ” ,応用解析研究会 ,早稲田大学 , 2016 年 6 月 .

牛越惠理佳 , “ ストークス方程式に対するアダマル変分公式とその応用 ” , 第 5 回岐阜数理科学研究会 , 飛騨高山まちの博物館 , 2016 年 8 月 .

牛越惠理佳 , “ ストークス方程式に対するアダマル変分公式とその応用 ” , 横浜国立大学における微分方程式セミナー , 横浜国立大学 , 2016 年 8 月 .

牛越惠理佳 , “ ストークス方程式の固有値に対するアダマル変分公式とその応用 ” , 第 46 回金沢解析セミナー , 金沢大学 , 2016 年 10 月 .

牛越惠理佳 , “ ストークス方程式の固有値に対するアダマル変分公式とその応用 ” , 三大学偏微分方程式セミナー , 中央大学 , 2016 年 10 月 .

牛越惠理佳 , “ Hadamard variational formula for the eigenvalues of the Stokes equations and its application ” , Toya workshop, Crystal Hall, Hotel Toya Sun Palce, 2016 年 11 月 .

牛越惠理佳 , “ Stokes 方程式の固有値に対するアダマル変分公式とその応用 ” , Seminar on Nonlinear Analysis at O-okayama, 東京工業大学 , 2016 年 12 月 .

⑲ 牛越惠理佳 , “ Hadamard variational formula for the eigenvalues of the Stokes equations and its application ” , The 5th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 大阪市立大学 , 2017 年 5 月 18 日 .

⑳ 牛越惠理佳 , “ ストークス方程式の固有値に対するアダマル変分公式とその応用 ” , 第 8 回大阪駅前セミナー , 龍谷大学 , 2017 年 7 月 .

㉑ 牛越惠理佳 , “ On the Hadamard's formula of the Stokes equations ” , 第 15 回日独流体数学国際研究集会 , 早稲田大学 , 2018 年 1 月 .

㉒ 牛越惠理佳 , “ Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the slip boundary condition ” , Hirosaki Workshop for Mathematical Fluid Mechanics 2018, 弘前大学 , 2018 年 1 月 .

## 6 . 研究組織

### (1) 研究代表者

牛越 惠理佳 ( USHIKOSHI , Erika )

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・講師

研究者番号 : 20714041