

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：12614

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800076

研究課題名(和文) 拡散効果の弱い流体における進行波形態の安定性による特徴づけ

研究課題名(英文) Characterization of shock profiles in terms of stabilization mechanisms in systems with weak dissipations

研究代表者

大縄 将史(Ohnawa, Masashi)

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：10443243

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：近年、輻射気体系や拡散に非線形性や上限を考慮した飽和拡散型Burgers方程式系、緩和を含む双曲型保存系など、散逸効果が弱い多くの系において、パラメータによって進行波(衝撃波)がなめらかなものから不連続を含むものになることが知られてきた。本研究は進行波の形態の違いを安定性の観点から説明することを目的とするものである。結果として、劣臨界の場合は系が有する拡散効果が移流効果に勝るが、臨界進行波では、任意に小さい初期摂動で解が有限時間で爆発し、さらにショックが強くなる(優臨界)と、エントロピー条件を満たす不連続が存在するがゆえに、移流によって安定性を回復することが分かった。

研究成果の概要(英文)：In the last two decades, many systems with weaker dissipation than diffusion are found to admit discontinuous traveling wave solutions if certain parameters exceed threshold values. Examples include radiating gas systems, saturating dissipation in the Burgers type equations, and hyperbolic systems with relaxation. This study aims to explain variations in the shock profiles in terms of stabilization mechanisms. We have proved the following facts for a simplified radiating gas system called Hamer's model. i) In all subcritical cases, radiation dominates over convection and the solution converges to a traveling wave solution without blowing up. ii) There are arbitrary small perturbations around the critical shock wave which cause blow up of the solution in a finite time. iii) In the supercritical cases, the existence of a discontinuity which satisfies the entropy condition helps convection to recover stability even in the L-infinity topology.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：不連続衝撃波 漸近安定性 爆発 不連続点の合体

1. 研究開始当初の背景

近年、輻射気体系や拡散に非線形性や上限を考慮した飽和拡散型 Burgers 方程式系、緩和を含む双曲型保存系、多孔質媒質中の浸透、癌浸潤モデル、画像解析など、散逸効果が弱い多くの系において、パラメータによって進行波（衝撃波）が通常見られるなめらかなものから不連続を含むものになることが知られてきた。これらの成果は対応する常微分方程式を調べることで得られたものであり、微小摂動が避けられない現実の系において安定的に存在するものであるのかを調べることは重要である。一部の系においては L1 位相での安定性、すなわち摂動の積分量が 0 に収束することが示されていたが、解の形状により深く関わる L 位相での安定性、つまり進行波解に微小な摂動が加わったときに衝撃波に一樣収束するかという問題は、連続な進行波のさらに特別なケースに示されるに留まり、不連続な進行波の場合は全く未解明であった。

2. 研究の目的

そこで本研究では、系のパラメータに応じて進行波の形状がなめらかであったり（劣臨界または臨界進行波）、不連続を持ったり（優臨界進行波）する理由を安定性の観点から説明することを目的とする。これによって、そのような進行波解の形態の違いが物理的に何に起因しているのか、そして形態を変えても安定に存在するとすればどのような機構によってそれぞれの進行波が維持されているのかについて追求する。

3. 研究の方法

研究代表者は上記の目的のために、輻射気体の簡易モデル系を対象として以下の予想を立てた。

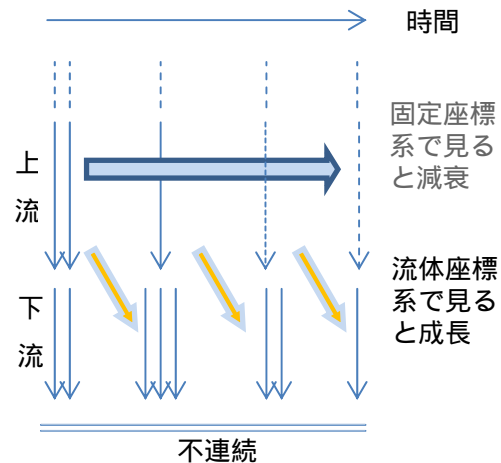
- (1) 劣臨界進行波では弱いながらも散逸効果が十分に働いて安定性が確保される。
- (2) 臨界進行波では任意に小さい摂動で爆発に至らしめるものが存在する。
- (3) 優臨界進行波ではもはや散逸効果では安定性を獲得できないが、エントロピー条件を満たす不連続が存在するがゆえに、移流によって安定性を回復する。

(1) の場合は、通常は摂動の積分量（ポテンシャル）が H2 空間に入ることまで要求するが、この系では強い衝撃波ほど正則性が低くなるという難点があるためその手法が使えない。そこで C1 級の解を構成し、レイノルズの輸送定理によって H1 エネルギーまで評価し、それに特性曲線法を組み合わせる方法を採る。

(2) の場合は、ある種の初期摂動がいかに小さくても解の勾配が有限時間で爆発することを、背理法を用いて示す。ここでも特性曲線法を主として用いる。

(3) の場合は、系が非局所的な効果を含むにも拘らず、局所解の存在時間内において摂

動が十分に小さければ不連続点から十分に離れた領域（下図の上流部）におけるエネルギーが減衰すること（下図の固定座標系での評価）をまず示す。続いて、不連続点が存在するがゆえに不連続から離れた領域の流体が有限時間で領域全体を占めること、およびその間の全領域のエネルギーの増大度（下図の斜め矢印）は時間について高々指数関数的であることを示す。これらを組み合わせることによる特殊なエネルギー法によって不連続進行波解の L 位相での安定性を示す。



不連続進行波における安定化機構の模式図。矢印の本数が摂動の強さに対応。不連続に近い領域での摂動は一時的には成長しうるが、いずれは減衰する。

4. 研究成果

研究の方法で述べた予想(1)-(3)に対して以下の成果を得た。

(1) 劣臨界進行波について

すべての劣臨界進行波は十分に小さい摂動に対して L 位相で安定であることを示した。特性曲線法によって一階微分が抑えられるための条件と、進行波解が劣臨界であるための条件が一致することが分かり、常微分方程式の相平面解析と偏微分方程式の安定性解析が自然につながることを見出した。

初期値が複数の不連続を含むときには、それらが分離したまま個々の不連続量が小さくなる場合と、その内のいくつかが合体しながらもその後も解が延長されて進行波解へ収束する場合があることを示した。これらは粘性 Burgers 方程式など通常の拡散を含む方程式には見られない著しい特徴である。

(2) 臨界進行波について

臨界進行波には任意に小さい摂動で爆発に至らしめるものが存在することを示した。

川島 - 西畑(1999)で得られていた爆発が起きるための十分条件が最良であることも示した。

(3) 優臨界進行波について

すべての優臨界進行波は奇関数の十分に小さい摂動に対して L 位相で安定であることを

を示した。

奇関数とは限らない摂動に対しても、ショックが十分に強ければ安定であることを示した。このとき不連続点は移動するが、初期値の重心位置に収束する。

これらの結果は L 位相では劣臨界進行波の一部についてしか安定性が得られていなかった従来の状況を大きく前進させるものである。

適用範囲の広さでは L_1 位相での安定性に譲るものの、本研究の成果を(1),(2),(3)の順に見ると、劣臨界から臨界に至っていったん失った安定性を、優臨界進行波で不連続を持つことで回復するものだと見ることが出来る。このような描像は斬新であり、不連続な進行波を持つ他の系においても現象の理解の手がかりを与えることが期待される。

(4)現在までにこれらの成果を次のように拡張することに成功した。

吸収係数の逆数に対応するパラメータを導入し、流速におけるショックの強さとの積を考えれば、吸収係数を固定して得られた進行波解の分類およびそれぞれの安定性に関する過去の結果に完全に対応する結果が得られることを示した。

フラックス関数をこれまでの Burgers フラックスから、より一般の凸関数で適当な性質を備えたものに拡張した方程式系を扱った。この系では Schochet-Tadmor(1992)が連続な進行波解が存在するための必要条件と十分条件を提示していたが、本研究で Kruzhkov の意味での広義解を考えることで不連続な進行波解を数学的に正当化し、エントロピー条件を満たすすべての場合に連続な進行波解もしくは1点でのみ不連続な進行波解が存在することを示した。さらに、Burgers フラックスの場合における上述の成果がほとんどそのまま成立することを示した。具体的には、連続な進行波が存在するための Schochet-Tadmor の十分条件の下で進行波が L 位相で安定であること、その条件をちょうど満たす臨界進行波は上述の意味で不安定であること、そしてショックが十分に強く Schochet-Tadmor の必要条件も満たさない場合に L 安定性を回復することを示した。これらの結果は、進行波の形態と安定化機構の間に密接な関係があるという研究目標をより明確に示すものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Masashi Ohnawa, L -stability of Discontinuous Traveling Waves in a Hyperbolic-elliptic Coupled System, SIAM J. Math. Anal., 査読有, Vol. 48(6), 2016, 3820-3839. DOI:10.1137/16M106738X

Yukihito Suzuki, Masashi Ohnawa, GENERIC formalism and discrete variational derivative method for the two-dimensional vorticity equation, J. Comput. Appl. Math., 査読有 Vol. 296, 2016, 690-708.

DOI: 10.1016/j.cam.2015.10.018

Masashi Ohnawa, Asymptotic Stability of Plasma Boundary Layers to the Euler-Poisson Equations with Fluid-Boundary Interaction, SIAM J. Math. Anal., 査読有, Vol. 47(4), 2015, 2795-2831. DOI:10.1137/140972019

Tadahisa Funaki, Masashi Ohnawa, Yukihito Suzuki, Satoshi Yokoyama, Existence and uniqueness of solutions to stochastic Rayleigh-Plesset equations, J. Math. Anal. Appl., 査読有, Vol. 425(1), 2015, 20-32.

DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.12.018

Masashi Ohnawa, L -Stability of Continuous Shock Waves in a Radiating Gas Model, SIAM J. Math. Anal., 査読有, Vol. 46(3), 2014, 2136-2159.

DOI:10.1137/130935252

[学会発表](計9件)

大縄将史, 輻射気体の衝撃波形態と安定化機構の関係, Interaction between Pure and Applied Mathematics 2016(招待講演), 東京, 2016年12月16日。

Masashi Ohnawa, On a relation between shock profiles and stabilization mechanisms in a hyperbolic-elliptic coupled system, XVI International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, Aachen, Germany, 2016年8月1日。

Masashi Ohnawa, Existence and stability of shock waves in the Rosenau model, 第8回名古屋微分方程式研究集会(招待講演), 名古屋, 2016年2月24日。

大縄将史, 輻射気体における衝撃波形態の安定化機構による特徴づけ, 京都大学 NLPDE セミナー(招待講演), 京都, 2015年11月20日。

大縄将史, 輻射気体における衝撃波の形態と安定化機構の関係, 早稲田大学応用解析研究会(招待講演), 東京, 2015年10月24日。

Masashi Ohnawa, L -stability of traveling waves to a hyperbolic-elliptic coupled system, Equadiff 2015, Lyon, France, 2015年7月10日。

大縄将史, 輻射気体モデルにおける進行波の連続性と安定化機構の関係, 東京工業大学非線形解析セミナー@大岡山(招待講演), 東京, 2015年6月19日。

大縄将史, ある双曲型楕円型連立系における衝撃波の形態と安定化機構の関係, 第63回理論応用力学講演会(NCTAM2014), 東京,

2014年9月28日。

大縄将史, 輻射気体における進行波の形態と安定化機構の関係, 日本流体力学会年会, 仙台, 2014年9月15日。

〔図書〕(計6件)

Masashi Ohnawa, On a relation between shock profiles and stabilization mechanisms in a radiating gas model, to appear in 'Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications', Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 20pp.

Masashi Ohnawa, L²-Stability of Discontinuous Traveling Waves in a Radiating Gas Model, in 'Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future', Y. Shibata, Y. Suzuki eds., Springer Proceedings in Mathematics and Statics, Vol. 183, 549-560, Springer, Tokyo (2016).

Masashi Ohnawa, Yukihiro Suzuki, Mathematical and numerical analysis of the Rayleigh-Plesset and the Keller equations, in 'Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future', Y. Shibata, Y. Suzuki eds., Springer Proceedings in Mathematics and Statics, Vol. 183, 157-177, Springer, Tokyo (2016).

Masashi Ohnawa, Effects of Fluid-Boundary Interaction on the Stability of Boundary Layers in Plasma Physics, in 'Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics', Birkhäuser, 401-410 (2016).

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa, Masahiro Suzuki, The mathematical justification of the Bohm criterion in plasma physics, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol.64, 489-495 (2015).

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa, Masahiro Suzuki, Nonlinear stability of boundary layer solutions to the Euler-Poisson equations in plasma physics, in 'Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications', AIMS on Applied Mathematics Vol.8, 817-822 (2014).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大縄 将史 (OHNAWA, Masashi)

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号: 10443243