様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2016
課題番号：２６８０００７９

研究課題名（和文）ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の数値解析とその展開

研究課題名（英文）Numerical analysis of Hamilton-Jacobi-Bellman equations and its developments

研究代表者
中野　張（Nakano, Yumiharu）

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：００４５２４０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：非線形放物型偏微分方程式及び線形確率偏微分方程式に対するメッシュフリー選点法の厳密な収束と，適用に有用な基底関数のクラスとグリッドについて研究を行った．その結果，これらの方程式が全空間で定義されている場合に，収束が厳密に保証される動径基底関数のクラスとグリッド構造及び補間点数の取り方を明らかにした．また，これらのことを数値実験においても確認した．以上の成果により，多次元の有限期間確率制御問題及び拡散過程のフィルタリング問題に対し，相対的に高速で計算可能かつ厳密に収束が保証される数値解法の開発に成功したことになる．

研究成果の概要（英文）：This study is concerned with rigorous convergence of meshfree collocation methods for nonlinear parabolic equations and linear stochastic partial differential equations, as well as with finding useful classes of basis functions and grid structures. For those equations defined on whole space, the study clarified the classes of basis functions and grid structures for which the corresponding approximation methods rigorously converge to the original equations. Also, these convergences are confined by numerical experiments. These results show that for finite horizon stochastic control problems and filtering problems for diffusion processes, the study reveals numerical methods that guarantee the rigorous convergences and need less computational time as compared with existing methods.

研究分野：確率制御理論

キーワード：ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式　確率偏微分方程式　メッシュフリー選点法

１．研究開始当初の背景

工学や金融・保険の問題において，連続時間確率制御問題として定式化されるものが多く存在する．一般に，これらの問題はハミルトン・ヤコビ・ベルマン偏微分方程式（以下，HJB 方程式と記す）や確率偏微分方程式（以下，SPDE と記す）により記述され，これらの数値解を求めることが問題解決と同等であることがよく知られている．

HJB 方程式や SPDE の数値解法については，有限差分法や有限要素法など偏微分方程式（以下，PDE と記す）に対するものを適用するアプローチと解の確率論的表現に基づきモンテカルロ法等により計算するアプローチに大別される．これら既存の方法は全て，高次元の問題への適用に際して困難があることが知られている．例えば，有限差分法は高次元の方程式の場合は収束を保証するためには強い条件が必要となり，有限要素法は次元が上がるにつれ補間の実装が非常に難しくなる．確率論的方法も実装は容易だが，計算時間がかかり，条件付き期待値の計算におけるカーネル密度推定が次元の呪いを生じさせる．

２．研究の目的

本研究課題では，放物型 HJB 方程式やより一般の放物型・楕円型非線形 PDE，SPDE に対して，適当なクラスの関数で近似する解析的近似法の開発と正当化を目指す．特に，粘性解の意味でのみ解の存在と一意性が保証される場合において，開発した近似法の収束を厳密に証明すること，および，応用上の諸問題へ実際に適用し，その性能を評価することを目的とする．　基底関数近似という着想そのものは数値解析においては常套であり，実際，関数のクラスを動径基底関数とする場合は，現在は狭いクラス，特に線形の楕円型 PDE に対して用いられている選点法に相当する．従って，本研究は現在の選点法を一般化し，様々なクラスの PDE に対して適用できるよう整備する試みと位置付けることができる．放物型 PDE に対しては，基底関数近似を適用している研究はよく知られていない．これは収束証明の困難さに起因するのではないかと思われる．既存研究では，古典解の存在する線形の方程式に対して正則性を用いて証明しているが，本研究は滑らかな解の存在が保証されない場合，特に粘性解の意味でのみ解の存在と一意性が保証される場合において，収束性を厳密に証明しようとするものである．

３．研究の方法

(1) 平成 26 年度には，HJB 方程式に対して適当な基底関数のクラスによる解析的近似法（以下，これを提案法と呼ぶ）を導出し，提案法の収束証明を試みる．基本的な接近法は，Barles-Souganidis による単調近似法の収束証明の議論の援用を検討することである．これによれば，一般の 2 階偏微分方程式の近似解の候補を定義する作用素が単調性と（テスト関数による）整合性，および安定性を満たすならば，構成された関数が方程式の一意の粘性解に収束することを証明することができる．しかし，提案法は微分の項を含むため，明らかに単調性は満たさない．　この点を解決するため，Barles-Souganidis の単調性の条件を近似的な意味まで緩めた上で，提案法が定義する作用素が近似的に単調であることを示すという方針で研究を進める．

(2) 平成 27 年度には，前年度に開発した証明技術をより一般の非線形 PDE に対して適用する．特に，非線形の楕円型 PDE のクラスへの拡張について研究する．上述の単調近似法についての証明技法が適用できれば拡張は比較的容易と思われる．さらに，様々な PDE に適用し，提案法が有効な問題のクラスをある程度特定したい．提案法は滑らかな近似法であるため，一定の正則性のある PDE で特徴づけられる問題が特に有望である．この点を検証する．さらに，これらの数値実験を通じて，より具体的な実装上の問題，特に，有効な基底関数のクラスの選択や他の数値解法との比較検証を行う．

(3) 平成 28 年度には SPDE への適用について研究する．この場合は，粘性解の手法はもはや使えないため，解の正則性を用いた誤差評価による収束証明を検討する．特に，方程式が線形の場合には解の存在と一意性および正則性についてよく知られた結果があり，これを利用すれば，確率常微分方程式の場合におけるオイラー・丸山近似の誤差評価と類似の議論が適用できると考えている．さらに，提案法をフィルタリングの問題に現れる Zakai 方程式や Kushner 方程式に適用する．

４．研究成果

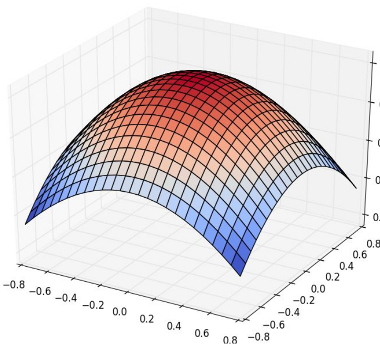
(1) 平成 26 年度では，HJB 方程式を含む一般の非線形放物型 PDE に対し，メッシュフリー選点法による数値解法の開発・研究を行った．既存研究では，線形の場合や１階の HJB 方程式の場合に数値解法を導出し，数値的にのみ収束を確認していたが，本研究では，より一般の場合に適用可能なメッシュフリー選点法を導出し，厳密に収束が保証されるための十分条件を与えた．より詳細には，方程式が非線形放物型 PDE の場合には解の滑らかさが期待できないこともあり，厳密な収束証明が試みられることもなかったが，本研究は一般の非線形放物型 PDE に対するゲーム論的接近

に着目し，非線形項の近似的な sup-inf 表現を求めることにより，粘性解の枠組みでの証明を実現したものである．本研究で示した定理は，非線形放物型偏微分方程式に対するメッシュフリー補間法の収束に関する初めてのものであり，この文脈における数学的基礎を与えるものと位置づけられる．このことにより，ファイナンスにおける最適化問題やロボット等の確率制御問題に対してメッシュフリー選点法を用いることの数学的妥当性が担保されることになる．また，本研究の成果により，これらの応用分野においてメッシュフリー補間法の使用が喚起され，この手法が持つ実装の容易さや高次元問題への適用のしやすさ等の利点を活かした実際的な研究開発の促進が期待できる．

(2) 平成 27 年度は，確率制御理論に現れる非線形 PDE の Dirichlet 問題と線形 SPDE に対する基底関数近似法の研究に取り組み，後者について擬補間関数による近似法を開発した．特に，連続時間非線形フィルタリングに現れる Zakai 方程式にこの擬補間法を適用し数値的に収束を示した．また，厳密な誤差評価を行い，短い時間区間においては提案近似法が理論的にも収束することを証明した．より詳細には，理論的誤差解析については昨年度開発した粘性解概念による技術が適用できないため，従来から知られているソボレフ空間における SPDE の理論を用い，時間と空間の離散化誤差評価を行った．端的に述べれば，全体の誤差は厳密解の時間離散化誤差と各時間ステップにおける厳密解の擬補間近似誤差の累積によって表されることを証明した．　連続時間非線形フィルタリングにおける既存数値計算法は実装が難しいものがほとんどだが，本年度研究実績により，実装が容易で計算時間も短い近似法が提供されることになり，ファイナンスや工学上の実際的な問題解決のための有用な道具となることが期待できる．

　当初の計画では，平成 27 年度に非線形 PDE の Dirichlet 問題に対する基底関数近似法の研究，平成 28 年度に SPDE に対する基底関数近似法の研究を実施予定であったが，前者の収束証明は予想以上に困難で，本年度実施研究と平行して進め次年度に成果が出すことを目指すこととした．

(3) 平成 28 年度は，非線形放物型 PDE 及び線形 SPDE に対するメッシュフリー選点法の適用に有用な基底関数のクラスとグリッドについて，数値的・理論的両方の観点から研究を行った．この目的のため，動径基底関数による補間理論について研究を進め，連続関数の空間でみた場合の補間関数の作用素ノルムが誤差評価において重要な役割を果たすことを明らかにした．このノルムは多項式補間理論におけるルベーグ定数の類似物であり，この場合と同様に，補間点数を大きくするとき当該作用素ノルムは発散することが知られている．これに対して本研究では，補間領域を無限に大きくするときには，補間関数のクラスとグリッド構造及び補間点数を適当にとることにより，当該作用素ノルムが有界に押さえられることを厳密に証明した．この結果により，全空間で定義されている放物型 PDE と線形 SPDE に対し，収束が厳密に保証される動径基底関数のクラスとグリッド構造及び補間点数の取り方を明らかにした．また，これらのことを数値実験においても確認した．メッシュフリー選点法の実装の容易さ，計算負荷の低さ，多次元問題への適用可能性については既知であり，それに加えて以上の成果により，多次元の有限期間確率制御問題及び拡散過程のフィルタリング問題に対し，相対的に高速で計算可能かつ厳密に収束が保証される数値解法の開発に成功したことになる．



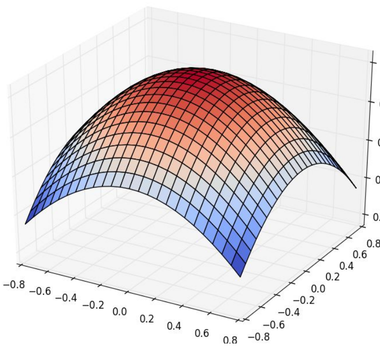


図: 確定的 KPZ 方程式の解析解（上），数値解（下）

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Y. Nakano, Convergence of the meshfree

collocation methods for fully nonlinear parabolic equations, Numer. Math., 36 (2017), 703--723. 査読有
DOI: 10.1007/s00211-016-0852-8

② Y. Nakano, On quadratic approximations for Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Automatica, 66 (2016), 205-217. 査読有
DOI: 10.1016/j.automatica.2016.01.001

③ M. Ieda, T. Yamashita, and Y. Nakano, A liability tracking portfolio for pension fund management, Proceedings of the 46th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 112-117, 2015. 査読有
DOI: 10.5687/sss.2015.112

④ A. Iizuka and Y. Nakano, On historical value-at-risk under distribution uncertainty, J. Math. Finance, 5 (2015), 113-118. 査読有
DOI: 10.4236/jmf.2015.52010

⑤ Y. Nakano, Quasi-Monte Carlo methods for Choquet integrals, J. Comput. Appl. Math., 287 (2015), 63-66. 査読有
DOI: 10.1016/j.cam.2015.03.026

⑥ Y. Nakano, An approximation scheme for stochastic controls in continuous time, Jpn. J. Ind. Appl. Math., 31 (2014), 681-696. 査読有
DOI:10.1007/s13160-014-0157-1

〔学会発表〕（計５件）

① 中野張，動径基底関数による非線形フィルターの近似，日本数学会秋季総合分科会，2016 年 9 月 16 日，関西大学（大阪府・吹田市）
② 中野張，動径基底関数による連続時間非線形フィルターの近似，2016 年 9 月 13 日，日本応用数理学会 2016 年度年会，北九州国際会議場（福岡県・北九州市）
③ 中野張， A collocation method for Zakai equations, SIAM Conference on Control & Its Applications, July 10, 2015, Maison de la Mutualité , Paris (France).
④ 中野張，非線形放物型 PDE に対するメッシュフリー法の収束について，数理ファイナンスセミナー，2014 年 11 月 7 日，慶應義塾大学（神奈川県・横浜市).
⑤ 中野張，非線形放物型 PDE に対するメッシュフリー法の収束について，日本応用数理学会 2014 年度年会，2014 年 9 月 5 日，政策研究大学院大学（東京都・港区）．

〔図書〕（計１件）
井上昭彦，中野張，福田敬，岩波書店，ファイナンスと保険の数理，2014，448（146-156, 205-257, 261-297, 343-360,423-426）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕
ホームページ等
http://t2r2.star.titech.ac.jp/cgi-bin/researcherpublicationlist.cgi?q_researcher_content_number=CTT100565300&alldisp=1&tab_yf=2017

６．研究組織
(1)研究代表者
中野　張（NAKANO, Yumiharu）
東京工業大学・情報理工学院・准教授
研究者番号：00452409

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　）