

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 9 月 6 日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800080

研究課題名(和文)生態系微分方程式における不安定性解消理論

研究課題名(英文)Theory on Stabilizing Differential Equations in Mathematical Ecology

研究代表者

齋藤 保久(Saito, Yasuhisa)

島根大学・総合理工学研究科・准教授

研究者番号：30402241

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：数理生態学において中止的な役割を担うLotka-Volterra微分方程式とRosenzweig-MacArthur微分方程式が有する、現象とのギャップ(生態学的不安定性)が、「生物の移動」と「環境変動」によってどのように解消されるかを解明する数学研究に取り組んだ。前者についてはLotka-Volterra微分方程式に限って研究成果を上げて、現在論文執筆中であり、後者についてはRosenzweig-MacArthur微分方程式に限り、幾分本題からずれてはいるが、関連性を有する研究テーマについて研究成果を上げて現在論文執筆中である。

研究成果の概要(英文)：I had tried to figure up how species dispersal and environmental fluctuations stabilize mathematical-ecologically fundamental systems of Lotka-Volterra equations and Rosezweig-MacArthur equations where so called "ecological instability" can be observed. Some results of them have been derived and I am now writing papers on them.

研究分野：関数方程式、数理生物学

キーワード：パーマネンス リミットサイクル

1. 研究開始当初の背景

Lotka-Volterra 方程式

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(r - aP), \\ \frac{dP}{dt} &= P(\mu aN - b) \end{aligned} \quad (LV)$$

と Rosenzweig-MacArthur 方程式

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{k}\right) - \frac{aNP}{1 + ahN} \\ \frac{dP}{dt} &= P \left(\frac{\mu aN}{1 + ahN} - b\right) \end{aligned} \quad (RM)$$

は、数理生態学において中心的な役割を担う二大数理モデルであるが、自然界で観察される被食者 - 捕食者系の動態とは大幅に異なる“生態学的に不安定”な解構造を有する。こうした現象と数理モデルとのギャップは、自然のメカニズムの洞察不足を意味するのは勿論であるが、同時に、モデルに組み込まれていない要因の重要性を浮き彫りにする。同ギャップが、どのような付加的要因によって解消されるかという研究視点から、見逃していた要因の重要性を暴き出し、系を持続的に保つ自然のメカニズムの理解を深めることは大変意義深い。

2. 研究の目的

(LV)について言えば、平衡状態($b/(\mu a), r/a$)が中立安定で、どんな初期状態から出発しても、解は系の状態点が発点に戻る周期解(閉軌道)となる。無数に多くの閉軌道が存在するこのモデルは、外的要因によって個体数の変化が起きると状態点はもとの軌道には戻らず、方程式に小さな摂動項が加わると解の性質が変わってしまうという意味で、構造的に不安定(structurally unstable)である。しかしながら、自然界で見られる周期的な個体数変動を表わすモデルとしては、軌道から外れることがあっても、時間がたつにつれてもとに戻るといった性質を有するのが望ましい。実際、自然界で見られる捕食者 - 被食者系では、(外的要因による個体数変化があろうと)変動幅の小さい持続的な安定共存が観察され、モデル方程式(LV)の性質とは大いに異なる。この事実が、Lotka-Volterra 方程式における現象と数理モデルとのギャップである。

また、(RM)は、方程式(LV)をより現実的なものにするために捕食者不在時の被食者成長はロジスティック則に従うとし、さらに、捕食は瞬時に行われるのではなく、捕食者が被食者を殺し、運び、食うまでに一定時間(処理時間 h) がかかると仮定して導出される方程式モデルであるが、このモデルは、方程式(LV)と違って構造安定であっても、 k の増加により平衡状態は不安定化

し、その周りに安定なリミットサイクル(極限閉軌道)が出現する。さらに k が増加して行くと、リミットサイクルの振幅はどんどん大きくなり、被食者と捕食者の個体群サイズが限りなくゼロに近い状況を経験するようになる。しかし既述したように、自然界の被食者-捕食者系で観察される周期的な個体群変動の振幅は比較的小さい。このギャップは、系を“豊か”にするはずの被食者の環境収容力が、逆に系の存続を危うくする効果をもたらす「富栄養化のパラドックス (Rosenzweig, *Science* (1971))」としても知られている。

一般に、生態学の理論研究において現象と数理モデルとのギャップは、自然のメカニズムを理解するための洞察が十分でないことを意味するのは勿論だが、同時に、モデルに組み込まれていない実在の要因の重要性を浮き彫りにし、その生態系における役割を探求する研究契機を与える。特に、生態系方程式の基礎モデルとして知られる(LV)と(RM)の両方程式においては、以上に述べた現象とのギャップを解消し、系を安定化させる重要な要因をリストアップする研究が、国内外の多くの理論家や実験家によってなされ、現在もおお生態学における中心的な話題であり続けている。しかしながら、同研究は、特に理論的アプローチにおいて、良質な数理的問題が提供されるポテンシャルに満ちたものであるにもかかわらず、従来用いられている解析技術は、平衡状態における局所解析や、数値シミュレーション等による大雑把な解挙動の把握のみで、数学の力量に欠けると言わざるを得ない。数学は、他分野の更なる発展の可能性を生み出すだけでなく、他分野から良質な問題が提供されることにより数学自体も大きく発展する学問であり、他分野と数学の間の学際的あるいは融合的な研究分野こそ、その実践の使命を担う。本申請課題研究では、同問題に対する数学的基盤の整備・強化により、生態学的にも数学的にも示唆に富む成果を導出し、両分野の更なる発展と新しい学問分野の開拓を目的とした。

2. 研究の方法

「生物の移動」と「環境変動」は、実際の個体群動態を考える上で最も基本的で不可欠な要因であるが、(LV)と(RM)の両モデルに組み込まれていない。植物であろうと、花粉や孢子の散乱は繁殖活動としての移動を意味するし、実際に生物が生息する環境は、ランダムにも季節的にも変動し、空間的にも一様でない。本研究では、「生物の移動」と「環境変動」にターゲットを絞り、両要因が(LV)と(RM)における現象とのギャップをどのように解消するかを、力量のある数学により明らかにして行くことを目標に設定した。

申請者は既に、方程式(LV)に対して環境変動を考慮した研究成果を挙げていた。ある程度特殊な状況のもと、環境変動が weakly integrally positive という関数族ならば、方程式(LV)は大域的に安定化することを証明し、その結果は数学分野の国際誌に既に掲載済であった。もともと weakly integrally positive という概念は、周期係数をもった線型常微分方程式の安定性理論で生まれた概念で、これが、全く別の非線型方程式の安定性問題に関連することは数学的に興味深い。また、weakly integrally positive という関数族は、極限方程式が(LV)に一致するような変動関数も含まれるため、この関数族が系を大域的に安定化させるという結果は数学的にも生態学的にも興味深い。したがって、上記の“ある程度特殊な設定”を生物学的に有意義なものへ緩和し、同論文成果の深化、一般化を図ることが課題であった。申請者の知る限り、こうした観点で環境変動が生物群集に与える影響を論じた研究報告は国内外にない。本研究の遂行は、生物の移動や環境変動そのものに対する一歩踏み込んだ(論理的で普遍的な)理解のための新しい数学理論を構築し、さらには、数学と数理生態学の視点から諸成果を磨き上げることで、「生物の移動

や環境変動はどのように種の安定共存を促すか」という生態学の問題に対する新しい知見の創出を導くものである。

さらに、こうした取り組みを被食者 捕食者の2種間相互作用に対してだけに留めず、より高い栄養段階にある捕食者も考慮した食物連鎖系への研究にも向け、数学的整備と生態学的考察により新しい研究成果を導くことも念頭に置いた。考察対象の生物種数が増えれば、そのモデル方程式の次元は高くなる。一般に、方程式の次元が高くなれば、解挙動の自由度は増し、解には必ずと振動性が帯びてくる。そうした状況においても系の持続性を探求できるよう、モデル方程式の解析の際に、大域的漸近安定性(global stability)とともに重要なパーマネンス(permanence)へ概念対象を拡張し、生物種の共存可能性をより本質的に洞察することも視野に入れていた。

本申請課題研究のもう1つの側面である「生物の移動」に着目した研究に対しても申請者は、同研究を遂行する上での予備的研究を既に行っていた。その結果は、方程式(LV)と(RM)に対し被食者の移出入を考慮して、(LV)に対しては平衡状態が大域的漸近安定であることを証明し、(RM)に対してはリミットサイクルが出現するための必要十分条件を導出して、被食者の移出入が系の安定化に決定的な効果をもたらすことを、力量のある数学で示したものであった。同成果における移出入の数理モデリングは、最もシンプルな空間構造を反映しており、この観点から偏微分方程式への拡張も視野に入れ、さらに、環境や群集に伴う確率性も考慮することで、同成果の普遍性を追求し、数学の眼だからこそ見える新しい世界を生態学の分野に提供することを目標に設定した。

3. 研究成果

(LV)と(RM)の両モデルに対する当初抱い

ていた目標は到達できなかったが、「生物の移動」については、時間変動的な外部移入を考慮した Lotka-Volterra 非自励系微分方程式について研究し、外部がパーマネンスでなくても、移入の効果により、内部系がパーマネンスになる状況のあることを力量のある数学を用いて明らかにし、数学的にも生態学的にも示唆の深い研究成果を上げることができた。同成果は、下記学会発表欄の1と3において発表し、現在論文執筆中である。また、(LV)と解の構造が類似する別のモデルにおいて、生物の移動(拡散)が及ぼす影響を研究し、移動の時間を考慮すると、系が安定化することを突き止めた。(LV)とは別のモデルであるが、解構造の類似性から、今後(LV)の研究についても役立つ研究成果だといえる。これについての研究発表は、下記学会発表欄の2に当たる。

「環境変動」については、幾分本題からずれてはいるが、(RM)に関わる研究テーマについて研究成果を上げることができた。本題からずれたとはいえ、(RM)に関わっている以上、今後(RM)の研究についても役立つ成果だと信じる。これについての研究発表は、下記学会発表欄の4, 5, 6, 7に当たり、同成果も現在論文執筆中である。

4. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0件)

〔学会発表〕(計 7件)

1. Yasuhisa SAITO, “Coexistence promoted by species migration in predator-prey models”, JSMB/SMB 2014 OSAKA, Osaka
2. 小國仁嗣、齋藤保久、「宿主被食による寄生者拡散を考慮した宿主寄生者微分方程式について」、第2回ODE若手セミナー、岡山理科大学
3. Yasuhisa SAITO, “Lyapunov function and some predator-prey differential equations”, JSMB 2016、九州大学伊都キャンパス
4. 齋藤保久、「リエナール方程式のある応用について」、常微分方程式の定性的理論ワークショップ、島根大学松江キャンパス
5. 齋藤保久、「間接効果を考慮した predator-prey 系の大域的漸近安定性とリミットサイクルについて」、RIMS 研究集会、京都大学数理解析研究所

6. Yasuhisa SAITO, “Permanence, global stability, and limit cycle on some predator-prey systems”, PNU MATH FORUM 2016, Pusan National University, Korea

7. 齋藤保久、「生物防除における系の大域的漸近安定性とリミットサイクルについて」、研究集会「生命動態とその数理」、松江エクセルホテル東急

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 保久 (SAITO, Yasuhisa)
島根大学大学院総合理工学研究科・准教授
研究者番号：30402241

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()

