

平成 30 年 5 月 31 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800083

研究課題名(和文) グラフのErdos-Posa propertyと次数条件の相互関係に関する研究

研究課題名(英文) A STUDY ON RELATIONSHIPS BETWEEN THE ERDOS-POSA PROPERTY AND DEGREE CONDITIONS IN GRAPHS

研究代表者

千葉 周也(CHIBA, Shuya)

熊本大学・大学院先端科学研究部(工)・講師

研究者番号：80579764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、Erdos-Posa propertyをみたすグラフと、指定したグラフ並びに指定した数の点素な部分グラフの存在性に対する次数条件との関係性について考察した。特に、次数制約付き点素部分グラフ問題からアプローチすることで、本研究課題に対するある種の1つの結論を与えることに成功した。さらに、指定した数による閉路分割や指定した数の点素な星グラフの存在性に対する様々な十分条件を与えることで、当該研究分野を進展させた。

研究成果の概要(英文)：In this research, I focused on the problem concerning relationships between the Erdos-Posa property and degree conditions for the existence of a prescribed number of vertex-disjoint subgraphs. In particular, I gave a conclusion for this problem in a sense by considering packing subgraphs in a graph under degree constraints. Moreover, I made progress in this research area by giving various sufficient conditions for partitioning a graph into cycles and for packing stars in a graph.

研究分野：離散数学

キーワード：グラフ理論 点素な部分グラフ 次数条件 Erdos-Posa property 閉路 星グラフ

1. 研究開始当初の背景

グラフとは、頂点集合と辺集合(頂点集合の二元部分集合の族)の組からなる構造である。グラフ H と正整数 k を固定したときに「グラフ G が k 個の点素な H を含む」とは、 G の中に H と同じ構造のグラフが互いに頂点を共有することなく k 個(部分構造として)存在することをいう。

1962年に、Erdos-Posaによって、すべてのグラフ G に対して、(i) G は k 個の点素な閉路を含む、もしくは、(ii) k のみに依存する数(G の頂点数には依存しない数)の頂点を G から除去することで、そのグラフが無閉路的になる、ことが証明された。この定理は「Packing Problem (グラフの詰込問題)」と「Covering Problem (グラフの被覆問題)」と呼ばれる2つの重要な問題と関係することから、上記の「閉路」を他の様々なグラフに置き換えた場合の考察が盛んに行われてきた(「グラフの Erdos-Posa property に関する研究」)。特に、それらの研究成果は理論計算機科学におけるフィードバックセットへの応用をはじめとして、他分野への影響が大きいことが知られている。

一方、Corradi-Hajnal(1963年)によって、グラフ G の最小次数(各頂点に接続している辺数の最小値)が $2k$ 以上あれば、 G は k 個の点素な閉路を含む、ことが証明されている。つまり、 k のみに依存する次数条件を付加することによって、Erdos-Posa の定理における(i)を常に保証することができる。この定理を出発点として、グラフ理論では閉路以外の様々な点素部分グラフに対して同様の研究が行われてきた(「点素部分グラフに対する十分条件(次数条件)に関する研究」)。しかしながら、上記の Erdos-Posa property に関する研究とは対照的に、後者の研究は数学的興味を主体としたものが多いことも特徴の1つである。

2. 研究の目的

Erdos-Posa の定理と Corradi-Hajnal の定理は、その結論部分を比較すると深い繋がりがあのように思われる。しかしながら、先に述べたように、その研究は現在までにそれぞれ個々に進められており、両者間の関係性についてはほとんど言及されてこなかった。つまり、「グラフ H が Erdos-Posa property をみたすならば、点素な k 個の H の存在性を(グラフの頂点数に依存しない)次数条件によって保証できるのか(また、その逆は成立するのか)」等の相互関係が明確にはなっていない。そこで、本研究では、両者の研究に有効的なグラフの特徴付けや両者間の関係性を明らかにすることで、両方の研究をグラフ理論及び関連分野への応用へと繋げることが目的である。

3. 研究の方法

先に述べた研究目的を達成するために、以

下の項目を具体的目標として設定することで本研究を遂行する。

- (1) 現在までの結果の証明法の詳細な解析
- (2) Erdos-Posa property をみたすグラフ、並びに、(頂点数に依存しない)次数条件によって点素部分グラフの存在性を保証できるグラフの列挙

(3) (2)で列挙したグラフの特徴付けと、それらから得られる新たな証明法の模索特に、より正確な特徴付けを行うために、(1)及び(2)の研究を重要課題とし、得られた研究成果を研究領域内における国内外の学会・研究集会、学術雑誌等を利用することで積極的に公表する。

4. 研究成果

- (1) 「次数制約付き点素部分グラフ問題からのアプローチ」(雑誌論文、学会発表)

1996年に、Stiebitzによって、グラフ G の最小次数が $s+t+1$ 以上ならば、 G に以下の(i)・(ii)をみたす2個の点素なグラフ F, H が存在することが証明された：(i) F の最小次数は s 以上である。(ii) H の最小次数は t 以上である。本研究では、最小次数条件と最小非隣接2頂点次数和条件の関係性に注目することで、この定理の「次数和版」を与えることに成功した。これらの結果の最も注目すべき点は、ある固定したグラフ H が k 個点素に存在するための次数条件を、 k が1の場合に帰着できることにある。実際に、上記の結果を利用することで、 k 個の点素な長さが3の倍数の閉路の存在性を頂点数に依存しない次数条件によって保証できることを示した。本研究に関するグラフの族として「閉路」や「偶数位数の閉路」が既存の例として知られていたが、それに次ぐ新たな族を発見することに成功した。また、上記の結果は“ k が1の場合に帰着できる”という意味で、本研究課題に対する1つの結論を与えた重要な成果である。

- (2) 「指定点を通る点素閉路問題に対する証明法の解析」(雑誌論文、学会発表)

2010年に、Dongによって、グラフ G の頂点数 n が $4k$ 以上で非隣接2頂点次数和の最小値が $n+2k-2$ 以上ならば、 G は以下の(i)・(ii)をみたす k 個の点素な閉路に分割できることが証明された：(i) 各閉路は指定した k 点集合 S の点をちょうど1点含む。(ii) 高々1つの閉路を除いて各閉路の長さは4以下である。一方、同年に、Chiba-Egawa-Yoshimotoによって、指定した k 点集合 S が“独立”という仮定の下で、Dongの定理の次数和条件と各閉路の長さを改善できることが証明された。本研究では、上記2つの定理の証明法を詳細に解析することで、2つの定理を繋ぐ一般化を与えることに成功した。特に、指定点 S 内の構造の状況が次数条件と閉路の長さに

影響を与えていることを示した。

- (3) 「二部グラフ上の点素閉路と有向グラフ上の点素有向閉路の関係性」(雑誌論文、学会発表)

1997年に、Brandtらによって、グラフ G の頂点数 n が $4k$ 以上で非隣接2頂点次数和の最小値が n 以上ならば、 G は k 個の点素な閉路に分割できることが証明された。本研究では、完全マッチングをもつ二部グラフに焦点を当てることで以下を証明した：頂点数 n が十分に大きい均衡的二部グラフ G の互いに異なる部集合に属す非隣接2頂点次数和の最小値が $n/2+2$ 以上ならば、 G の任意の完全マッチング M に対して、 G は M の辺をすべて通る k 個の“長い”閉路に分割できる。特に、本研究結果が上記Brandtらの結果の一般化であることも示した。さらに、この結果から「二部グラフ上の点素な閉路」と「有向グラフ上の点素有向閉路」の関係性が得られるので、本研究課題を有向グラフ上の話へと発展させる重要な成果でもある。

- (4) 「ハミルトン閉路の存在性に対する次数条件」(雑誌論文、学会発表)

本研究課題の特殊ケースに対する研究の1つとして、ハミルトン閉路(与えられたグラフ G の全頂点を通る“1個の”閉路)の存在性を保証するための十分条件について考察を行った。特に、(i)クローフリーグラフ上のハミルトン閉路の存在性に関するMattwes-Summer予想(1984年)・Thomassen予想(1986年)と、クローフリーグラフ上の Tutte 閉路の存在性に関する Jackson 予想(1992年)並びに、3-正則グラフ上の長い閉路の存在性に関する Bondy 予想(1989年)の強弱関係を与えた。(ii)グラフ上の最長閉路と独立4頂点次数和の最小値との関係性を与えた。(iii)ハミルトン閉路と独立数、次数和の関係性に関する Ozeki-Yamashita 予想(2008年)の肯定的な解決を与えた。

- (5) 「ハミルトン閉路の緩和構造の存在性に対する次数条件」(雑誌論文)

与えられたグラフ G のすべての辺と接続している閉路を G の辺支配閉路と呼び、辺支配閉路はハミルトン閉路を緩和した構造の1つとして知られている。本研究では、辺支配閉路を保証するための禁止部分グラフ条件を与えた。特に、閉路分割の場合とは異なり、辺支配閉路の存在性に対する最良な禁止部分グラフのペアの中にはクローを含まないものが存在することが分かり、禁止部分グラフの観点で閉路分割との差を明らかにした。

- (6) 「点素星グラフの存在性に対する次数条件と星グラフの性質」(雑誌論文、学会発表)

点素な星グラフ(高々1つを除いてすべて

の頂点の次数が1の木)の存在性に対する次数条件について考察し、星グラフと完全グラフの Ramsey 数を利用することで2008年の Fujita 予想を部分的に解決することに成功した。一方で、星グラフを誘導部分グラフとして禁止したグラフの族の構造的特徴についても考察を行い、異なる禁止部分グラフ条件の“差”について新たな知見を見出した。

- (7) 「点素星グラフ問題とマッチング問題の比較」(雑誌論文、学会発表)

点素な星グラフの特殊ケースの1つとして、グラフのマッチング問題について考察を行った。その中でも、スケジューリング問題への応用が期待される2008年に Alspach によって導入されたグラフの Matching Sequencibility に焦点を当て、グラフの辺数と最大次数の観点から上界と下界を与えた。特に、一般の星グラフの場合とは異なり、グラフの彩色を用いたシンプルな証明を与え、さらには、Matching Sequencibility とハミルトン閉路との関係性も与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計12件)

Shuya Chiba, Jun Fujisawa, Michitaka Furuya, Hironobu Ikarashi, Forbidden pairs with a common graph generating almost the same sets, Electronic Journal of Combinatorics, 査読有, Vol. 24, 2017

Shuya Chiba, Tomoki Yamashita, Degree sum conditions for vertex-disjoint cycles passing through specified vertices, Discrete Mathematics, 査読有, Vol. 340, 2017, pp. 678-690, DOI: 10.1016/j.disc.2016.12.010

Suyun Jiang, Shuya Chiba, Shinya Fujita, Jin Yan, Vertex-disjoint copies of $SK_{1,t}$ in $SK_{1,r}$ -free graphs, Discrete Mathematics, 査読有, Vol. 340, 2017, pp. 649-654, DOI: 10.1016/j.disc.2016.11.034

千葉 周也, 山下 登茂紀, 二部グラフ上の完全マッチングを含む2-因子と有向グラフ上の有向2-因子, 2016年度応用数学合同研究会報告集, 査読無, 2016, pp. 122-129

Shuya Chiba, Yuji Nakano, Remarks on upper and lower bounds for

matching sequencibility of graphs ,
FILOMAT , 査読有 , Vol. 30 , 2016 , pp.
2091-2099 ,
DOI: 10.2298/FIL1608091C

Shuya Chiba , Michitaka Furuya , Shoichi
Tsuchiya ,
Dominating cycles and forbidden pairs
containing $SP_{\{5\}}$,
Graphs and Combinatorics , 査読有 , Vol.
32 , 2016 , pp. 1773-1788 ,
DOI: 10.1007/s00373-015-1673-8

Shuya Chiba , Michitaka Furuya , Shoichi
Tsuchiya ,
Forbidden pairs and the existence of a
dominating cycle ,
Discrete Mathematics , 査読有 , Vol. 338 ,
2015 , pp. 2442-2452 ,
DOI: 10.1016/j.disc.2015.06.018

Shuya Chiba ,
On lower bounds for matching
sequencibility of general graphs ,
Proceedings of The 2015 Engineering
Workshop among Ajou University,
Shandong University and Kumamoto
University , 査読無 , 2015 , p.52

Shuya Chiba , Nicolas Lichiardopol ,
Vertex-disjoint subgraphs with high
degree sums , Electronic Notes in
Discrete Mathematics , 査読有 , Vol. 49 ,
2015 , pp. 359-366 ,
DOI: 10.1016/j.endm.2015.06.050

Roman Cada , Shuya Chiba , Kenta Ozeki ,
Petr Vrana , Kiyoshi Yoshimoto ,
Equivalence of Jackson's and
Thomassen's conjectures ,
Journal of Combinatorial Theory, Series
B , 査読有 , Vol. 114 , 2015 , pp. 124-147 ,
DOI: 10.1016/j.jctb.2015.04.001

Roman Cada , Shuya Chiba , Kenta Ozeki ,
Petr Vrana , Kiyoshi Yoshimoto ,
A relationship between Thomassen's
conjecture and Bondy's conjecture ,
SIAM Journal on Discrete Mathematics ,
査読有 , Vol. 29 , 2015 , pp. 26-35 ,
DOI: 10.1137/130937974

Shuya Chiba , Masao Tsugaki , Tomoki
Yamashita ,
Degree sum conditions for the
circumference of 4-connected graphs ,
Discrete Mathematics , 査読有 , Vol. 333 ,
2014 , pp. 66-83 ,
DOI: 10.1016/j.disc.2014.06.012

[学会発表](計21件)

千葉 周也 , 山下 登茂紀 , 二部グラフ上の
完全マッチングを含む 2-因子と有向グラ
フ上の有向 2-因子 , 2016 年度応用数学合
同研究集会 , 2016 年 12 月 16 日 , 龍谷大
学

千葉 周也 , 藤田 慎也 , Suyun Jiang , Jin
Yan , Minimum degree and forbidden
subgraph conditions for disjoint stars
in large graphs , 離散数学とその応用研
究集会 2016 , 2016 年 8 月 21 日 , 高城コミ
ュニティセンター

Shuya Chiba , On 2-factors through
specified perfect matchings in
bipartite graphs , The Japanese
Conference on Combinatorics and its
Applications(JCCA2016) , 2016 年 5 月 22
日 , 京都大学

千葉 周也 , 次数条件と 2-因子について,
RIMS 共同研究「閉曲面上のグラフの彩色
問題への因子・閉路を利用したのアプロ
ーチ」, 2016 年 3 月 8 日 , 京都大学

Shuya Chiba , Degree conditions for
2-factors with k cycles in bipartite
graphs , The 4th Japan-Taiwan Conference
on Combinatorics and its Applications ,
2016 年 3 月 6 日 , 北九州国際会議場

Masao Tsugaki , Shuya Chiba , Kenta Ozeki ,
Michitaka Furuya , Tomoki Yamashita , A
degree sum condition on the order, the
connectivity and the independence
number for Hamiltonicity , The 4th
Japan-Taiwan Conference on
Combinatorics and its Applications ,
2016 年 3 月 6 日 , 北九州国際会議場

Shuya Chiba , On lower bounds for
matching sequencibility of general
graphs , The 2015 Engineering Workshop
among Ajou University , Shandong
University and Kumamoto University ,
2015 年 11 月 13 日 , 熊本大学

Shuya Chiba , Michitaka Furuya , Kenta
Ozeki , Masao Tsugaki , Tomoki Yamashita ,
A degree sum condition on the order, the
connectivity and the independence
number for Hamiltonicity , The Second
Japan-Sino Symposium on Graph Theory,
Combinatorics and Their Applications ,
2015 年 11 月 2 日 , 東京理科大学

Shuya Chiba , On disjoint subgraphs with
high degree sums , The Second Japan-Sino
Symposium on Graph Theory ,

Combinatorics and Their Applications ,
2015 年 11 月 2 日 , 東京理科大学

Shuya Chiba , Nicolas Lichiardopol ,
Vertex-disjoint subgraphs with high
degree sums , European Conference on
Combinatorics, Graph Theory and
Applications 2015 (EuroComb2015) , 2015
年 9 月 3 日 , Hotel Grand Terminus (ベル
ゲン・ノルウェー)

千葉 周也 , グラフにおける次数条件と点
素な閉路 , 第 11 回組合せ論若手研究集会 ,
2015 年 3 月 5 日 , 慶應義塾大学

千葉 周也 , 山下 登茂紀 , 指定した頂点を
含む閉路によるグラフの分割 , 2014 年度
応用数学合同研究集会 , 2014 年 12 月 18
日 , 龍谷大学

Shuya Chiba ,
Some remarks on upper and lower bounds
for matching sequencibility of graphs ,
The First Sino-Japan Symposium on Graph
Theory, Combinatorics and their
Applications 2014 年 10 月 30 日 Academy
of Mathematics and Systems Science (北
京・中国)

山下 登茂紀 , 千葉 周也 , 古谷 倫貴 , 小
関 健太 , 津垣 正男 , ハミルトン閉路が存
在するための次数和条件 , 離散数学とその
応用研究集会 2014 , 2014 年 8 月 21 日 , 新
潟総合テレビ・ゆめディア 301~303

千葉 周也 , 正則グラフの Matching
Sequencibility について , 離散数学とそ
の応用研究集会 2014 , 2014 年 8 月 20 日 ,
新潟総合テレビ・ゆめディア 301~303

千葉 周也 , Matching sequencibility of
regular graphs , 第 31 回代数的組合せ論
シンポジウム , 2014 年 6 月 19 日 , 東北大
学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕
ホームページ等
<https://researchmap.jp/7000017053/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

千葉 周也 (CHIBA , Shuya)
熊本大学・大学院先端科学研究部 (工) ・
講師
研究者番号 : 8 0 5 7 9 7 6 4

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :

(4) 研究協力者

()