

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 26 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800085

研究課題名(和文)正則性の高いグラフにおける因子問題に関する研究

研究課題名(英文)On factor problems in graphs with high regularity

研究代表者

藤沢 潤 (FUJISAWA, Jun)

慶應義塾大学・商学部(日吉)・准教授

研究者番号：00516099

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で得られた主な成果を以下に挙げる。1) どのような (d, m) に対して"任意の射影平面の5-連結三角形分割がdistance d m -extendableである"という命題が成り立つかという問題について、唯一解明されていなかった $d=4$ の場合が解決された。2) 5-連結平面グラフで三角形でない面が2つ以下であるようなグラフにおける距離条件を用いたマッチング拡張性に関して、他の研究グループの先行研究では得られていなかった最善の値を導くことに成功した。3) 局所連結度の高い偶数頂点のスターフリーグラフにおいて、どの2辺間の距離も離れているようなマッチングが拡張的であることが示された。

研究成果の概要(英文)：The following is the main part of the results obtained in this research. Firstly, as for the problem of determining whether every 5-connected projective planar triangulation is distance d m -extendable or not, we solved the $d=4$ case. Secondly, in 5-connected planar graphs with at most two non-triangular faces, we obtained the best threshold on distance matching extendability, which was not shown in the former research. Thirdly, it turned out that highly locally-connected star free graphs of even order have the property such that every matching in which the edges lie pairwise distance far apart is extendable.

研究分野：数物系科学

キーワード：グラフ 位相幾何学的グラフ理論 因子問題 マッチング

1. 研究開始当初の背景

(1) 頂点数が $2m+2$ 以上の偶数であるグラフ G において、どの m 本からなるマッチング M についても M を含むような完全マッチングが存在するとき、 G は m -extendable であるという。また、「 m 本からなるマッチング M で、どの 2 辺も距離が d 以上離れているもの」をどのように選んでも M を含むような完全マッチングが存在するとき、 G は distance d m -extendable であるという。Aldred と Plummer による数篇の論文に端を発し、「どのような閉曲面の」任意の 5-連結三角形分割が「どのような (d,m) に対して」distance d m -extendable になるか、という研究が近年なされてきたが、射影平面においては上記の (d,m) が完全決定されていなかった。

(2) あるグラフの族に含まれる任意のグラフは、任意の m に対して distance d m -extendable となる」という d が存在するような無限個のグラフの族を要素とする集合族 H について、これまでの研究では位相幾何学的側面からの特徴づけしかなされておらず、他のグラフの構造による H の解明がなされていなかった。特に、3-連結 3-正則グラフ全体は上記の H の要素とならないが、どのような 3-連結 3-正則グラフの部分集合が H に含まれるかについては、Aldred と Jackson による論文で近いテーマの研究がなされていたにもかかわらず、知見が全く得られていない状況であった。

(3) 閉曲面上に、どの辺も他の辺と高々 1 回交差するように描画できるグラフを 1-平面的グラフという。頂点数が n の 1-平面グラフの辺の数は高々 $4n-8$ となることが知られているが、この上界を達成するグラフは最適 1-平面グラフと呼ばれている。1-平面グラフは辺の縮約に関して閉じていないグラフの族であるため、既存のマッチング理論における手法が使えず、それが 1-平面グラフのマッチング拡張性に関する研究の障壁となっていた。

2. 研究の目的

3-連結 3-正則グラフは、グラフ理論研究の根幹をなす重要なグラフの族であり、計算機を用いない証明が知られていない「四色問題」を始めとする多くの有名な予想が 3-連結 3-正則グラフに帰着される。また、分子構造を表すグラフの族が 3-連結 3-正則グラフに含まれるなど、応用面から見ても重要なグラフの族である。したがって、3-連結 3-正則グラフの持つ性質をより多く解明することは重要な研究課題となる。また、閉曲面上の 3-連結 3-正則グラフの双対は三角形分割となるため、三角形分割の構造を調べることも必然的に重要となる。

3. 研究の方法

(1) どのような (d,m) に対して「任意の射影平面の 5-連結三角形分割が distance d m -extendable である」という命題が成り立つかという問題について、平面グラフにおける同様の結果で用いられた手法を再考察し、射影平面上での議論における問題点を洗い出した。その結果、骨格となるグラフが平面的でない場合は平面グラフと同様の議論が可能であり、差異はオイラー数にのみ現れることが得られた。一方、骨格となるグラフが平面的である場合には、メビウスバンドを含む面において射影平面特有の議論が必要になることがわかったため、精密な議論の上その困難を打破した。

(2) 上記のグラフの集合族 H について、局所的な blow-up 操作に関して閉じているグラフの族は H に含まれないという考察のもと、新たな H の要素の探索を行った。その中で、局所連結度や 3-連結 3-正則グラフにおける局所構造といった、この問題と相性のよい性質が得られたため、それらを精査し、どのような条件を満たせば H の要素となるかを究明した。

(3) 1-平面グラフは辺の縮約について閉じていないグラフの族であるため、マッチング理論における基本的な手法である Bipartite Distillation がそのまま適用できなかった。そこで、最適 1-平面グラフに Bipartite Distillation を適用した際に起こるグラフの変化を精査し、適用後のグラフにおける有用な位相幾何学的特徴を見出した。

4. 研究成果

(1) どのような (d,m) に対して「任意の射影平面の 5-連結三角形分割が distance d m -extendable である」という命題が成り立つかという問題について、唯一解明されていなかった $d=4$ の場合が解決された。

(2) 5-連結平面グラフで三角形でない面が 2 つ以下であるようなグラフにおける距離条件を用いたマッチング拡張性に関して、他の研究グループの先行研究では得られていなかった最善の値を導くことに成功した。

(3) 局所連結度の高い偶数頂点のスターフリーグラフの族が、上記の集合族 H の要素となることが示された。これは、 H に関する研究の中で位相幾何学的な性質を用いない初めての結果となる。

(4) 3-連結 3-正則グラフの中で、どの辺も長さの短いサイクルに含まれるという性質を持つものの集合が上記の H に含まれるであろうという強い感触が得られた。これが正しかった場合、Aldred-Jackson の結果と対照

的なものとなり、非常に興味深い。

(5)最適1-平面グラフのマッチング拡張性に関する知見が得られた。特に、最適1-平面グラフが2-extendable、3-extendable になるための必要十分条件が得られた。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Y. Egawa, J. Fujisawa, M. D. Plummer, A. Saito and T. Yamashita, Perfect matchings avoiding prescribed edges in a star-free graph, *Discrete Mathematics*, Volume 338, Issue 12, December 2015, Pages 2260-2274, 査読有,
DOI:10.1016/j.disc.2015.05.014

Y. Egawa, J. Fujisawa, M. Furuya, M. D. Plummer and A. Saito, Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, *The Electronic Journal of Combinatorics* 22 no. 3 (2015), Paper3.13, 査読有,
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Volume22-3>

J. Fujisawa and K. Ota, Edge Proximity Conditions for Extendability in Planar Triangulations, *Journal of Graph Theory* Volume 80, Issue 1, September 2015, Pages 1-11, 査読有,
DOI:10.1002/jgt.21827

R. E. L. Aldred and J. Fujisawa, Distance-restricted matching extension in triangulations on the torus and the Klein bottle, *The Electronic Journal of Combinatorics* 21 no. 3 (2014), Paper 3.39, 査読有,
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Volume21-3>

J. Fujisawa and K. Ota, Maximal cycles in graphs of large girth, *SUT Journal of Mathematics* 50 (2014), no. 2, 427-438, 査読有,
<http://www3.ma.kagu.tus.ac.jp/sutjmath/pg22.html>

[学会発表](計 11 件)

藤沢 潤, Edge proximity conditions for matching extendability of graphs, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年 3 月 24 日, 首都大学東京南大沢キャンパス (東京都八王子市)

Jun Fujisawa, Recent progress on

matching extendability of graphs on surfaces, International Workshop on Combinatorial and Computational Aspects of Optimization, Topology and Algebra, 2016 年 12 月 1 日, Los Cabos (メキシコ)

藤沢 潤, 距離条件を用いたマッチング拡張性について, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016 年 8 月 20 日, 高城コミュニティセンター (宮城県宮城郡)

Jun Fujisawa, Forbidden pairs of graphs generating almost the same sets, The 4th Japan-Taiwan Conference on Combinatorics and its Applications, 2016 年 3 月 5 日, 北九州国際会議場 (福岡県北九州市)

Jun Fujisawa, Matching extension in triangulations of the projective plane The Second Sino-Japan Symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications, 2015 年 11 月 2 日, Tokyo University of Science (東京都新宿区)

藤沢 潤, 射影平面の三角形分割におけるマッチング拡張性, 日本数学会 秋季総合分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大学 (京都府京都市)

Jun Fujisawa, Recent progress on matching extendability in triangulations of surfaces, The 9th KIAS Combinatorics Workshop, 2015 年 9 月 11 日, Hotel the Bloomvista, Yangpyeong-gun (韓国)

藤沢 潤, 射影平面上のグラフのマッチング拡張と距離条件, 離散数学とその応用研究集会 2015, 2015 年 8 月 22 日, 熊本大学工学部 (熊本県熊本市)

Jun Fujisawa, Edge proximity conditions for extendability in triangulations of surfaces, The First Sino-Japan Symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications, 2014 年 10 月 30 日, Chinese Academy of Sciences, Beijing (中国)

藤沢 潤, 射影平面上のグラフのマッチング拡張問題について, 日本数学会 秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学 (広島県東広島市)

藤沢 潤, クローフリーグラフのハミルトン性に関する話題, RIMS 共同研究「禁止マイナー・因子理論に関する諸問題の研究」, 2014 年 9 月 4 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

[図書](計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

<http://k-ris.keio.ac.jp/Profiles/209/0020856/profile.html>

6．研究組織

(1)研究代表者

藤沢 潤 (FUJISAWA, Jun)

慶應義塾大学・商学部・准教授

研究者番号：00516099