

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 2 日現在

機関番号：32607

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800086

研究課題名(和文) グラフの支配数に関する縮約臨界性と, Vizing 予想への応用

研究課題名(英文) Contraction-criticality for the domination number of graphs and application for Vizing's conjecture

研究代表者

古谷 倫貴 (Furuya, Michitaka)

北里大学・一般教育部・講師

研究者番号：40711792

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、頂点の除去や辺の縮約・追加によって支配数が減少するようなグラフについて考察し、ある意味での妥当性を持った一般化を与えた。その成果として、頂点除去について臨界的なグラフの直径の上界に関して、いくつかの既存の定理の一般化を与えることに成功した。また、多彩支配数と呼ばれる支配数の一般化について、その値が自明なものとなるための最大次数に関する最善な十分条件を与えることができた。その結果として、様々な問題において多彩支配数が有効に働く状況を把握できるようになった。

研究成果の概要(英文)：In this research, we focused on the graphs having the domination-criticality for the contraction or addition of edges, or the deletion of vertices, and gave some generalizations for such concepts. By using such new concept, we generalized some theorems concerning upper bounds on the diameter of vertex-deletion critical graphs. Furthermore, we also gave a sufficient condition forcing the rainbow domination of graphs to be trivial value via maximum degree. So we can see when the rainbow domination number is appropriate to be used for a generalization of the domination number.

研究分野：グラフ理論

キーワード：グラフ理論 支配数 Vizing予想 臨界的グラフ 多彩支配数 直径 最大次数

1. 研究開始当初の背景

グラフの支配数は、スケジューリング問題やラジオ塔配置問題に広く応用される一方で、グラフの着色や超グラフの被覆問題に用いられるなど、その数学的な重要性からも古くから研究されている不変量である。支配数に関する最も有名な問題として、1963年に Vizing が提唱した「2つのグラフ G, H の支配数の積は、 G と H のデカルト積の支配数以下になる」という予想 (Vizing 予想) が挙げられる。Vizing 予想に関する研究は現在までに数多く行われてきたが、未だにその完全解決には至っていない。

Vizing 予想を考える場合に有効なアプローチ方法の一例として、Clark と Suen が提案した二重射影法が知られている。この手法はグラフのデカルト積の支配集合を元のグラフへ射影するものであり、対象のグラフの支配集合の分布が詳しく分析されるほど、その精度は高くなる傾向にある。

一方で、Bresar らは「Vizing 予想が偽であるならば、その最小反例は臨界的グラフ (任意の辺の追加や縮約等によって支配数が減少するグラフ) となる」ことを示した。したがって、Vizing 予想を証明する際には、臨界的グラフにのみ焦点を当てれば十分であることになる。しかし、一般の臨界的グラフの構造には不明な点が多く、特に支配集合の分布を詳細に観察する必要のある二重射影法を臨界的グラフに適用するという研究は行われてこなかった。

そのような背景の下で本研究の開始直前に、縮約臨界的グラフの直径の上界に関する重要な予想が解決された。その証明の核心となったのは、縮約臨界的グラフの支配集合の取替え操作によるその分布の把握である。そこで、その技法を用いることで臨界的グラフに二重射影法を適用し、Vizing 予想にアプローチすることを狙いとした。

加えて近年は、支配数的不変量を用いた Vizing 予想に類似する予想が提案され、それに関する結果が数多く得られている。特に当時は多彩支配数という支配数の一般化の観点から Vizing 予想に取り組むという研究が始まったばかりであった。このような方針から研究を深めることも有効であると考えられる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、臨界的グラフの支配集合の分布を更に詳しく調査し、それを用いて Vizing 予想にアプローチするものである。そのためには、臨界的グラフの部分構造や適切な不変量を把握し、多くの情報を引き出すことが欠かせない。臨界的グラフ自体についても、マッチングの存在性やハミルトン閉路といった全域構造に関する様々な未解決問題が知られているため、そのような観点から研究を行うこともグラフ理論における重要な課題である。以上の理由から本研究では

Vizing 予想への応用を中心に据え、支配数に関する臨界性の総合的研究を行うことを第一の目標とした。

また、多彩支配数を用いて Vizing 予想に取り組むためには、一般論を展開するための特徴を捉えることが必要となる。特に、最大次数が小さいグラフの多彩支配数は自明な値をとることが知られている。そのような場合には多彩支配数の利点が無効に働かないため、そのような状況の明確な特定が大きな課題となる。更に多彩支配数に関しては、全支配数やローマ支配数といった研究が非常に発展している支配数的不変量との比較の研究も進展しているところである。その方針の研究も進めることで、既存の結果を用いたアプローチも期待できる。

3. 研究の方法

(1) 臨界的グラフの構造、特に研究代表者が以前から研究を行っている直径問題をはじめとする不変量を多角的に調査し、支配集合の分布との関連性を把握する。それに加えて、多岐に渡る臨界性の共通の一般化を目指すことで、Vizing 予想の最小反例で考えるべきグラフの性質を明確にする。また、より広い観点から支配集合の分布を把握するために、臨界的グラフのみではなく、何本の辺を加えると支配数が減少するかなどといった不変量に着目し、その振る舞いに関する研究を行う。

(2) 多彩支配数に関しての様々な性質を調査する。既に述べた通り、多彩支配数が自明な値となる場合の特定が重要な問題となる。また、 k の値に応じて k -多彩支配数の値がどのように振舞うかを調査することで多彩支配数と Vizing 予想の関係性をより明確なものにする。それらを踏まえた上で、多彩支配数自体の上界や他の不変量との大小関係を考察する。

(3) 臨界的グラフの部分構造の把握のために、禁止部分グラフ、すなわち特定の誘導部分グラフの存在を禁止するという条件を調査する。禁止部分グラフ条件を用いる際に、支配集合の概念を用いることで証明の本質的部分が明確になる場合がある。したがって、支配集合と禁止部分グラフ条件にはある種の相互関係があるため、本研究の目的と密接に関連がある。

4. 研究成果

(1) 頂点除去に関する臨界性に関する結果として、 k 数の頂点を除去することで支配数が減少する (Δ, k) -臨界的グラフの直径が $2k-3$ 以下であることを証明した。 (Δ, k) -臨界的グラフの直径の上界については、ある予想が否定的に解決されたばかりであったため、このような具体的な上界を与えたことは重要であった。更にその後、 $(\Delta, 1)$ -臨界的

グラフと $(k, 2)$ -臨界的グラフの両クラスを含むような新たな臨界性を定義し, そのようなグラフの直径の上界及びその上界を満たすグラフの特徴付けを行った. その結果, 頂点除去に関する臨界的グラフの直径の問題を一つの定理で表すことに成功した.

(2) 任意の連結グラフにおいて, その 2 -多彩支配数が全支配数以上となるという予想の解決を行った. 全支配数は支配数的不変量の中で最も研究が進んでいる不変量である. したがって本研究で得られた関係性を用いることで全支配の多くの既存結果が 2 -多彩支配数に情報を与えることが期待される.

(3) グラフの最大次数が $k/2$ 以下であるとき, その k -多彩支配数が自明な値になること, 及びその最大次数の条件が最善であることを証明した. 既存の結果としては k の平方根に依存する値の境界が知られていたのみであったため, 大きな改善であることが分かる. この結果を用いることで, 例えばすべてのladderグラフの多彩支配数をすべて決定することができた.

(4) グラフのreinforcementという概念を多彩支配数に適した形に拡張し, その性質を調べることで, k -多彩支配数と $(k+1)$ -多彩支配数の間の明確な差を主張することに成功した. これは辺追加に関する臨界性を拡張する概念であるという意味でも, 本研究において重要な不変量であると言える. また, このような差を主張する他のアプローチとして独立多彩支配数に注目し, その上限を二部グラフ及び一般のグラフについて決定した. 「2015年度応用数学合同研究集会」にてこれらの結果が評価され, 2015年度応用数学研究奨励賞を受賞した.

(5) m の値が2または3のときに, 生成される m -連結グラフが有限通りに限定されるような禁止部分グラフの特定を行った. また, 連結グラフに 2 -歩道が存在するための禁止部分グラフ条件を完全決定することにも成功した. これらの証明中では支配集合の概念を用いることで, 議論を簡潔に行うことが出来ている.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計17件)

S.Fujita and M.Furuya, Safe number and integrity of graphs, Discrete Appl. Math. 掲載決定, 査読有.

M.Furuya, Bounds on the domination number of a digraph and its reverse, Filomat, 掲載決定, 査読有.

M.Furuya and N.Matsumoto, Forbidden

subgraphs for k vertex-disjoint stars, J. Comb. 掲載決定, 査読有.

M.Furuya and S.Tsuchiya, Monochromatic homeomorphically irreducible trees in 2-edge-colored complete graphs, J. Comb. 掲載決定, 査読有.

M.Furuya, M.Koyanagi and M.Yokota, Upper bound on 3-rainbow domination in graphs with minimum degree 2, Discrete Optim. 掲載決定, 査読有.
DOI: 10.1016/j.disopt.2018.02.004

Y.Egawa and M.Furuya, On star-packings having a large matching, Australas. J. Combin. 70 (2018) 336-339, 査読有.
http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/70/ajc_v70_p336.pdf

Y.Egawa and M.Furuya, The existence of a path-factor without small odd paths, Electron. J. Combin. 25 (2018) #P1.40,
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v25i1p40>

M.Furuya, M.Takatou and S.Tsuchiya, Distance-restricted matching extendability of fullerene graphs, J. Math. Chem. 56 (2018) 606-617, 査読有.
DOI: 10.1007/s1091

M.Furuya and N.Matsumoto, Vertex-addition strategy for domination-like invariants, Electron. J. Combin. 24 (2017) #P3.45, 査読有.
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v24i3p45>

J.Amjadi, N.Dehgardi, M.Furuya and S.M.Sheikholeslami, A sufficient condition for large rainbow domination number, Int. J. Comput. Math. Comput. Syst. Theory 2 (2017) 53-65, 査読有.
DOI: 10.1080/23799927.2017.1330282

S.Chiba, J.Fujisawa, M.Furuya and N.Ikarashi, Forbidden pairs with a common graph generating almost the same sets, Electron. J. Combin. 24 (2017) #P2.13, 査読有.
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v24i2p13>

J.Amjadi and M.Furuya (他4名), The rainbow reinforcement numbers in gra

phs, Discrete Appl. Math. 217 (2017) 394-404, 査読有.
DOI: 10.1016/j.dam.2016.09.043

M.Furuya and T.Yashima, Neighborhood-union condition for an $[a,b]$ -factor avoiding a specified Hamiltonian cycle, Discrete Math. 340 (2017) 1419-1425, 査読有.
DOI: 10.1016/j.disc.2016.09.026

Y.Egawa and M.Furuya (他 3 名), Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, Electron. J. Combin. 22 (2015) #P3.13, 査読有.
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v22i3p13>

M.Furuya, On the diameter of domination bicritical graphs, Australas. J. Combin. 62 (2015) 184-196, 査読有.
http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/62/ajc_v62_p184.pdf

M.Furuya, A note on total domination and 2-rainbow domination in graphs, Discrete Appl. Math. 184 (2015) 229-230, 査読有.
DOI: 10.1016/j.dam.2014.11.002

M.Furuya, Forbidden subgraphs and the existence of a 2-walk, Discrete Math. 333 (2014) 56-61, 査読有.
DOI: 10.1016/j.disc.2014.06.013

[学会発表](計 14 件)

古谷倫貴, 禁止部分グラフが生成するグラフクラスの比較, 組合せ数学セミナー, 2017 年 12 月 22 日, 東京大学(東京都目黒区)

古谷倫貴, 支配数的不変量の一般的な境界について, 離散数学とその応用研究集会 2017, 2017 年 8 月 19 日, 熊本大学(熊本県熊本市)

古谷倫貴, グラフの禁止構造条件について, 大阪組合せ論セミナー, 2017 年 6 月 17 日, 大阪市立大学梅田サテライト(大阪府大阪市)

古谷倫貴, Some bounds on the domination number of digraphs, 2016 年度応用数学合同研究集会, 2016 年 12 月 17 日, 龍谷大学(滋賀県大津市)

古谷倫貴, On the diameter of domination weak bicritical graphs, 離散数学

とその応用研究集会 2016, 2016 年 8 月 20 日, 高城コミュニティーセンター(宮城県宮城郡)

古谷倫貴, Erdos-Hajnal conjecture について, RIMS 共同研究 閉曲面上のグラフの彩色問題への因子・閉路を利用したアプローチ, 2016 年 3 月 7 日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

M.Furuya, Some approaches for comparing rainbow domination numbers, Topology and Combinatorics seminar, 2016 年 2 月 29 日, Ajou University(韓国)

M.Furuya, Forbidden pairs with a common graph generating almost the same sets, 11th KIAS Combinatorics Workshop, Korea Institute for Advanced Study(韓国)

古谷倫貴, rainbow domination number の比較に対するアプローチ, 2015 年度応用数学合同研究集会, 2015 年 12 月 19 日, 龍谷大学(滋賀県大津市)

古谷倫貴, 小さい奇位数道を持たない path-factor の存在, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015 年 9 月 14 日, 京都産業大学(京都府京都市)

古谷倫貴, On total domination and 2-rainbow domination in graphs, 2014 年度応用数学合同研究集会, 2014 年 12 月 20 日, 龍谷大学(滋賀県大津市)

M.Furuya, Redundancy of forbidden subgraph conditions, The First Sino-Japan symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications, 2014 年 10 月 30 日, Chinese Academy of Sciences(中国)

古谷倫貴, 禁止部分グラフ条件の妥当性について, RIMS 共同研究 禁止マイナー・因子理論に関する諸問題の研究, 2014 年 9 月 3 日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

古谷倫貴, Redundancy of forbidden subgraph conditions for the existence of a Hamiltonian cycle, 離散数学とその応用研究集会 2014, 2014 年 8 月 20 日, 新潟総合テレビ・ゆめディア(新潟県新潟市)

[その他]
ホームページ等
<https://sites.google.com/site/michitakafuruya/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

古谷 倫貴 (FURUYA, Michitaka)

北里大学・一般教育部・講師

研究者番号：4 0 7 1 1 7 9 2