

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2015

課題番号：26870269

研究課題名(和文)3次元領域における境界要素法の高速直接解法の開発と最適設計問題への応用

研究課題名(英文)Fast direct solvers for the boundary element method in 3D and their applications to optimal design problems

研究代表者

飯盛 浩司(Isakari, Hiroshi)

名古屋大学・工学(系)研究科(研究院)・助教

研究者番号：50638773

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文):境界要素法の高速直接解法を開発すること、これを用いた効率的なトポロジー最適化法を開発することを目的として研究を行った。Interpolative decomposition (ID)に基づく方法、H行列演算とadaptive cross approximation (ACA)に基づく方法、高速多重極法(FMM)と代数方程式のマルチフロントアルゴリズムに基づく方法の三種について検討を行った。また、開発したソルバを用いた波動デバイスのトポロジー最適設計法の開発を行った。提案法により、吸音材の最適設計問題などの工学的に重要な問題を効率良く解くことができることを確認した。

研究成果の概要(英文):This study aims at developing fast direct solvers for boundary element method and efficient topology optimisations with the direct solvers. We have studied three types of the fast direct solvers; an interpolative-decomposition (ID)-based method, adaptive cross approximations with the H-matrix algebra, and the fast multipole (FMM) combined with a multifrontal solver for algebraic equations. With the proposed solvers, we have developed topology optimisations for wave devices. We have confirmed that an optimal design problem for sound-proof device, which is one of the important issues in engineering, can efficiently be solved by the proposed optimisation method.

研究分野：計算科学

キーワード：境界要素法 高速直接解法 トポロジー最適化 トポロジー導関数 感度解析 随伴変数法 波動問題

### 1. 研究開始当初の背景

境界要素法は工学に現れる種々の境界値問題の数値解法の一つであり、特に、波動問題を効率良く解くことができる。素朴な境界要素法の計算量は問題の自由度  $N$  の二乗に比例するため、通常、境界要素法に現れる代数方程式を反復解法(CG法やGMRes等)で解き、反復解法のアルゴリズムが要求する行列ベクトル積を多重極法[1]で加速する。しかしながら、問題によっては反復法の収束は遅く、多重極法を用いて加速しても現実的な計算時間を達成できない場合がある。そこで近年では、線形方程式の直接解法(LU分解など)を用いた高速な境界要素法(高速直接解法)に関する研究が行われている[2]が、未だ決定版と言えるものは無く、更なる基礎研究が必要である。

一方で、計算力学の発展に伴い、最適設計に関する研究が広く行われている。元来、高剛性で軽量な弾性材料を設計することが当該分野の主眼であったが、近年では波動問題や流体力学等、種々の物理に支配される場における最適設計法に関する研究が行われている。歴史的な背景から、従来の最適設計法のほとんど全ては有限要素法に基づくが、例えば波動問題に対しては有限要素法よりも境界要素法の方が効率的である。各々の問題を効率良く解くことのできる数値解法を用いることで、最適設計の効率を大幅に改善することができると考えられる。実際、例えば、音響問題においては、騒音を抑制する吸音材の最適設計は重要な課題であるが、有限要素法に基づく手法ではメッシュの再生成にかかる計算負荷が高く、吸音材表面における境界条件をそのまま取り扱うことが困難である。一方で、境界要素法を用いる場合には最適化の各ステップにおいて境界要素を容易に再生成することができるため、吸音材等の最適設計問題を自然に取り扱うことができると考えられる。

研究代表者はこれまでに境界要素法を利用した波動問題におけるトポロジー最適化を開発してきた[3]が、最適化アルゴリズム内で用いる境界要素法は従来の多重極法およびGMResを用いた手法であった。勾配法に基づく最適化法では順問題・随伴問題と呼ばれる二種類の境界値問題を解く必要があるが、多くの場合、これを境界要素法で離散化して得られる代数方程式の係数行列は共通のものとなる。したがって、これらの求解に高速直接解法を用いることで、最適化法の更なる効率化を図ることが可能であると認識した。以上が本研究開始当初の背景である。

[1] V. Rokhlin, *J. Comp. Phys.*, 60, 187-207, 1985.

[2] P. G. Martinsson and V. Rokhlin, *J. Comp. Phys.*, 205(1), 1-23, 2005.

[3] 興相洋一, 飯盛浩司, 高橋徹, 山田崇恭, 松本敏郎. 計算数理工学論文集, 13, 55-60, 2013.

### 2. 研究の目的

本研究の目的は大きく分けて以下の3つである。

- (1) 境界要素法の高速度直接解法に関する基礎的な研究を行い、種々の波動問題におけるその性能評価を行う。
- (2) 有限要素法に基づく最適化法では困難な最適設計問題に対して、境界要素法を用いたトポロジー最適化法を開発する。
- (3) 開発した高速直接解法を用いたトポロジー最適化を開発し、各種波動デバイスに対する効率的な最適設計法を確立する。

### 3. 研究の方法

以上の目的を達成するため、以下の手順で研究を実行した。

- (1) これまでに、いくつかの境界要素法の高速度直接解法が提案されている。本研究では、MartinssonらのInterpolative decomposition (ID)に基づく方法、H行列演算とAdaptive cross approximation (ACA)に基づく方法、高速多重極法とマルチフロンタル法に基づく方法の利用可能性を検討する。ベンチマーク問題を用いて、問題の規模と計算時間や精度の関係性を精査する。
- (2) 音響問題における吸音材、フォトニック結晶、クローキングデバイスの最適設計問題に対するトポロジー最適化法を開発する。本研究では、各々の問題に対するトポロジー導関数を厳密に導出する。
- (3) (1), (2)で得られた結果を統合し、各種波動デバイスの最適設計問題を解き、得られた最適構造の性能を評価する。

### 4. 研究成果

はじめに、当初有力であると考えていたIDに基づく高速直接解法を、フォトニック結晶などの数値解析においてしばしば利用されるPMCHWT定式化に基づく境界要素法へと拡張した。IDを用いて行列を階層的に圧縮するため、階層の深さに応じてブロック行列の並び替えを行うことで拡張することができた。開発した手法を用いて円形誘電体による電磁波動散乱問題を解いた。境界要素数が数千から十万程度の場合、従来の高速多重極法と反復法に基づく解法よりも本手法の方が効率的であったが、それ以上の規模の問題に対しては多重極法のパフォーマンスを上回ることができなかった(学会発表)。そこで、多重極法とマルチフロンタル法の組み合わせによる高速直接解法を検討した。本手法では、多重極法における多重極モーメントおよび局所展開係数を新たに未知量とすることで、もとの代数方程式よりもサイズは大きい、疎な行列を得る。得られた疎な行列をマルチフロンタル法で解くことにより、高速算法を実現する。本手法を2次元および3次元Helmholtz方程式のNeumann境界値問題へと

適用した。結果、2次元の場合には良好な結果を得たが、3次元の場合にマルチフロント法で使用するメモリ量が多く、数万以上の自由度の問題を解くことができなかつた。これは、もとの行列が疎行列であっても、その逆が疎であるとは限らず、LU分解に際してfill-inが発生することに起因すると考えられる。そこで、多重極法の各種オペレータをIDにより圧縮することを試みた。多重極法は代数的には最適な低ランク近似を与えないため、このような圧縮が可能である。結果として、IDを併用することで数十万程度の規模の問題を高速に解くことが可能となった。開発した高速直接解法をフォトニック結晶のバンドギャップ計算へと適用し、従来の有限要素法に基づく手法よりも高速にバンド計算を行えることを示した(雑誌論文、学会発表)。最後に、H行列演算に基づく高速解法に関する検討を行った。概ね良好な結果を得た(学会発表)が、H行列演算に基づくLU分解は共有メモリ環境における並列化効率が高くはないことが判明した。今後、分散メモリ環境における並列化、LU分解のアルゴリズムを改良することを検討する予定である。また、H行列演算に基づく方法を用いてクロッキングの最適設計を行った結果は論文投稿準備中である。

次に、トポロジー最適化法の利用範囲拡大に関する研究を行った。吸音材のトポロジー最適化に関して、3次元領域における剛体(論文)、2次元および3次元領域におけるインピーダンス材(論文)のトポロジー最適化法を開発した。インピーダンス材のトポロジー最適化においては、インピーダンス境界条件を有する材料の湧き出しに関するトポロジー導関数を厳密に導出した。特に、領域境界で定義される目的関数(エネルギーフラックス等)を扱う際には、湧き出した材料の表面における目的関数の変分を厳密に評価する必要があることを見出し、従来からある方法は誤りであることを指摘した。図1に3次元領域における吸音材のトポロジー最適化の問題設定を示す。設計領域(図中の箱)下方に設置した点音源を、設計領域内に吸音材を配置し、半球面上に設置した観測点で最小化する最適設計問題を解いた。図2に示すとおり、滑らかな最適形状を得ることができ、目的関数(観測点における音圧ノルムの和)を初期形状の30%程度に低減することができた。

最後に、以上の結果を統合し、境界要素法の高速直接解法を用いたトポロジー最適化法の開発を行った。特に、非線形固有値のトポロジー最適化に関して顕著な成果をあげることができた(論文)。この結果を応用し、フォトニック結晶のフルバンドギャップ幅を目的関数とし、これを最大化するトポロジー最適化法を開発した。高速直接解法とトポロジー最適化の組み合わせにより、バンドギャップの存在しない構造を初期形状とした

場合にも、バンドギャップ幅の最大化問題を解くことができた。この結果を含む論文は現在投稿準備中である。

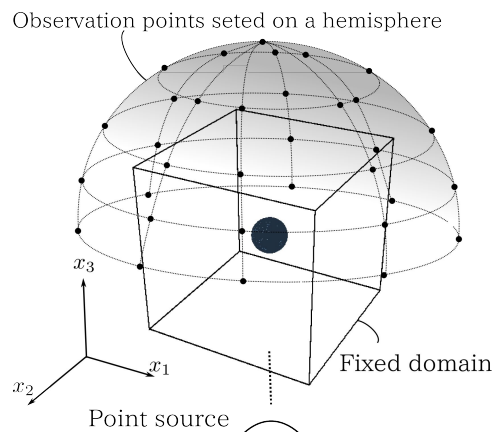


図1 吸音材のトポロジー最適化  
(論文のFig. 4を引用)

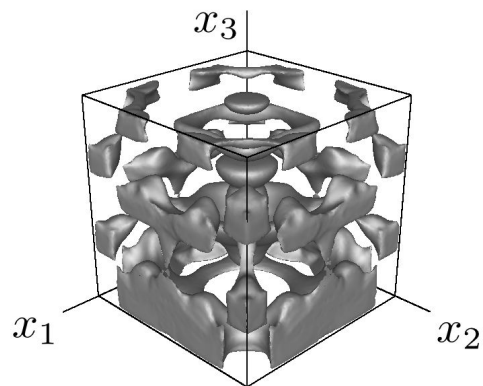


図2 最適化後の吸音材配置  
(論文のFig. 6の一部を引用)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

中本健太, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎, 境界要素法を用いたクロッキングデバイスのレベルセット法に基づくトポロジー最適化, 計算数理工学論文集, Vol. 15, pp. 55-60, 2015, [http://gspun1.gee.kyoto-u.ac.jp/JA\\_SCOME/denshi-journal/index.html](http://gspun1.gee.kyoto-u.ac.jp/JA_SCOME/denshi-journal/index.html). 【査読有】

花田萌美, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎, 2次元音響問題における境界要素法を用いたインピーダンス境界を有する散乱体のトポロジー最適化, 計算数理工学論文集, Vol. 15, pp.37-42, 2015, <http://gspun1.gee.kyoto-u.ac.jp/JA>

SCOME/denshi-journal/index.html.【査読有】

飯盛浩司, 北林達也, 高橋徹, 松本敏郎, Helmholtz 方程式の境界値問題に関連する固有値のトポロジー導関数と高速直接境界要素法を用いたその数値計算, 計算数理工学論文集, Vol.15, pp.31-36,2015,http://gspsun1.goe.kyoto-u.ac.jp/JASCOME/denshi-journal/index.html.【査読有】

Hiroshi Isakari, Toru Takahashi, Toshiro Matsumoto, Periodic band structure calculation by the Sakurai-Sugiura method with a fast direct solver for the boundary element method with the fast multipole representation, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 68, pp.42-53,2016,doi:10.1016/j.enganabound.2016.03.018.【査読有】

Hiroshi Isakari, Kenta Nakamoto, Tatsuya Kitabayashi, Toru Takahashi, Toshiro Matsumoto, A multi-objective topology optimization for 2D electro-magnetic wave problems with the level set method and BEM, European Journal of Computational Mechanics, 2016,doi:10.1080/17797179.2016.1181042.【査読有】

近藤豊大, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎, 3次元音響問題におけるレベルセット法と高速多重極境界要素法に基づくインピーダンス境界を有する散乱体のトポロジー最適化, 計算数理工学論文集, Vol.14, pp.19-24, 計算数理工学会, 2014,http://gspsun1.goe.kyoto-u.ac.jp/JASCOME/denshi-journal/index.html.【査読有】

Hiroshi Isakari, Kohei Kuriyama, Shinya Harada, Takayuki Yamada, Toru Takahashi, Toshiro Matsumoto, Level set-based topology optimization for 2D heat conduction problems using BEM with objective function defined on design-dependent boundary with heat transfer boundary condition, Engineering analysis with boundary elements, Vol. 61, pp.61-70, 2015, doi:10.1016/j.enganabound.2015.06.012.【査読有】

〔学会発表〕(計28件)

飯盛浩司, SS法と高速直接境界要素法を用いたフォトニックバンドギャップの数値計算について, 第44回電磁界理論シンポジウム, 2015年10月29日, ANAホリディ・インリゾート宮崎, 宮崎.

Kenta Nakamoto, Hiroshi Isakari, Toru Takahashi, Toshiro Matsumoto, Acceleration of the boundary element

method using H-matrix, 機械学会東海支部講演会, 2016年3月17日, 愛知工業大学八草キャンパス, 豊田.

Hiroshi Isakari, A fast direct solver for the boundary element method with PMCHWT formulation, 2014年7月22日, WCCM XI, Palace of Congresses of Catalonia, Spain.

他25件

6. 研究組織

(1) 研究代表者

飯盛浩司 (ISAKARI, Hiroshi)

名古屋大学・工学研究科・助教

研究者番号: 50638773

以上