

平成30年6月19日現在

機関番号：34315

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26870289

研究課題名(和文)力学系から現れる幾何構造の研究

研究課題名(英文)study on geometric structures arising from dynamical systems

研究代表者

多羅間 大輔(Tarama, Daisuke)

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号：30722780

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：振子や剛体の回転運動を記述するHamilton力学系に現れる種々の幾何学的構造に関して解析し、新たな幾何構造の発見や力学系の性質の幾何学的解明を目指して研究を行った。特に、回転群を一般化したLie群について最も対称性の高い完全積分可能なHamilton力学系を考え、その平衡点の安定性を明らかにした。また、自由剛体の完全積分可能なHamilton力学系に付随する幾何学的対象であるファイバー空間の幾何構造を力学系の挙動と関係付けて解明した。

研究成果の概要(英文)：This research has dealt with various geometric structures arising from the Hamiltonian systems, which for example give a mathematical description of the rotational motion of a rigid body or the motion of a pendulum. The aim of the research is to reveal new geometric structures and to clarify the properties of dynamical systems geometrically. Particularly, one has considered the completely integrable Hamiltonian systems on Lie groups, which are Hamiltonian systems with the largest symmetry over the geometric object generalizing the rotation groups. As a result, one has clarified the stability properties of the equilibria for these systems. One has also revealed the geometric structures of elliptic fibrations arising from completely integrable systems of free rigid body dynamics in relation with the dynamical properties of the systems.

研究分野：可積分系の理論，幾何学的力学系理論，および関連する幾何学(代数的・複素解析的幾何学等)

キーワード：Hamilton力学系 完全積分可能系 Lie群 剛体 平衡点 安定性 ファイバー空間 モノドロミー

1. 研究開始当初の背景

(完全積分可能な)Hamilton 力学系には次の3つのアスペクトで種々の幾何構造が現れる:

- (1) 力学系の幾何学的定式化
Hamilton 力学系の定式化は、多様体上のシンプレクティック構造や Poisson 構造に基づいて行われる。
- (2) 力学系の平衡点(特異点)
力学系の平衡点(特異点)の性質は、力学系の挙動に深く関わる。
- (3) 力学系に付随して現れる多様体の族・ファイバー空間
完全積分可能な Hamilton 力学系には、相空間であるシンプレクティック多様体に Lagrange ファイバー空間の構造を誘導する。

力学系のもつ「パラメータに関する変動」という視点に立つと、上記の3つのアスペクトのあいだの密接な関係が明確化される。実際、双 Hamilton 構造(2つの整合的な Poisson 構造により生成される Poisson 構造の1次元族)をもつ完全積分可能な Hamilton 系については、平衡点(特異点)の性質を双 Hamilton 構造により解析できる。((1) (2)) また、完全積分可能な Hamilton 力学系の平衡点の性質は、付随する Lagrange ファイバー空間の特異ファイバーの構造と表裏一体の関係にある。((2) (3)) さらに力学系が完全積分可能性を保つパラメータをもつとき、Lagrange ファイバー空間の族が得られ、次元の高い底空間上のファイバー空間が考えられる。このファイバー空間は、力学系の分岐現象と深く関わる。((1) (3))

2. 研究の目的

力学系・幾何構造・多様体の「パラメータに関する変動」という視点の下で完全積分可能な Hamilton 力学系から幾何構造が現れる3つのアスペクト(1), (2), (3) の相互関係を重視しながら、力学系の観点による新たな幾何構造を解明することと完全積分可能な Hamilton 力学系の幾何学的理解を深化させることが目的であった。

とりわけ、次のテーマについて考察を行うこととした:

- (1) 1自由度 Hamilton 力学系や Lie 群上の力学系
自然なパラメータを持つ 1 自由度 Hamilton 力学系(シンプレクティック多様体が2次元の場合)や Lie 群上の完全積分可能系について、
双 Hamilton 構造や対応する Lie 環の変形などの微分幾何学的な幾何構造を考察する。
力学系の平衡点とその安定性、
Birkhoff 標準形を解析する。
Birkhoff 標準形の解析接続とパラメータに関する変形から生じるスペクトル曲線や Lagrange トーラス

のファイバー空間の関係を調べる。さらに、非可積分系摂動に対する力学系の分岐現象について幾何的に考察する。

- (2) 実解析的楕円ファイバー空間
私は 2012 年に出版された論文で複素楕円曲面を用いて与えられたモノドロミーを持つ実自由度 2 の完全積分可能系を構成した。そこでは、複素楕円曲面の実構造が重要であった。それを受けて、通常複素多様体上でのみ考えられる楕円ファイバー空間を実解析的底空間まで拡張し、特異ファイバーや全空間のシンプレクティック構造・接触構造・複素構造を分類する。
- (3) 応用との関係
この研究計画のスコープに入る応用として、(1)および(2)に対応する量子力学系(量子化)と元の力学系の関係を明らかにする。また、(1)の Lie 群上の力学系には行列の数値計算アルゴリズムと関係するものもあり、その関係について調べる。

3. 研究の方法

上記の研究の目的を達するため、以下のような具体的課題について研究を行った。

- (1) Mishchenko と Fomenko によって導入された半単純 Lie 環上の完全積分可能な Hamilton 力学系(自由剛体の一般化)について、双 Hamilton 構造を用いることで、平衡点の安定性を解析する。
- (2) 剛体の運動に関わる低自由度の完全積分可能 Hamilton 力学系に付随する Lagrange ファイバー空間やその族の幾何構造を複素代数幾何学的観点から明らかにする。
- (3) Weierstrass 標準形を用いて楕円ファイバー空間の底空間を実多様体へ拡張する。それによって、全空間にシンプレクティック構造や接触構造等の幾何構造が導入できるか調べる。
- (4) 実対称行列全体のなす空間上の完全積分可能 Hamilton 力学系である Bloch-Iserles 系の平衡点の安定性を解析し、行列の数値計算アルゴリズムとの関係を解明する。

4. 研究成果

3. の研究方法にしたがって得られた結果を述べる。

- (1) Mishchenko と Fomenko により導入された半単純 Lie 群上の自由剛体の力学系(完全積分可能系)に関する研究として、はじめにユニタリー群 $U(n)$ 上の Euler 方程式について安定性を解析した。この結果は、5. の [雑誌論文] にまとめられている。この論文では、双 Hamilton 構造をもつ Hamilton 系の完全積分可能性・(孤立)平衡点の決定・孤立平衡点

の非退化性を統一的に扱う Bolsinov と Oshemkov による方法 (2009 年) を用いた。Bolsinov と Oshemkov の論文に対しては完全積分可能性や複素化に関する議論を補完することが実用上の観点から必要であったため、〔雑誌論文〕では $U(n)$ のみならず一般の双 Hamilton 系について、完全積分可能性と複素化に関する議論の詳細な検討によって Bolsinov と Oshemkov の結果を補完した。

また、 $U(n)$ の Lie 環上に Euler 方程式の孤立平衡点の位置や安定性に関する結果も著しいものであり、孤立平衡点の集合は対角行列からなる標準的な Cartan 部分環と一致し全て楕円型 (Lyapunov 安定) であることが示された。 $U(n)$ の場合の結果を一般化する試みを、はじめに任意の複素半単純 Lie 環の正規実形およびコンパクト実形上の Euler 方程式について行い、いずれの場合も孤立平衡点の集合は Euler 方程式を特徴付ける Cartan 部分環と一致することがわかった。さらに、正規実形では孤立平衡点は全て双曲型 (不安定) であることがわかり、コンパクト実形の場合は全て楕円型 (Lyapunov 安定) となることがわかった。

この一般的結果に関するプレプリントの出版を試みていた際に、下記 (4) の Bloch-Iserles 系の平衡点の安定性解析に関して孤立平衡点は全て楕円型 (Lyapunov 安定) であるという結果が出たが、Bloch-Iserles 系は特別な場合には C 型単純 Lie 環の正規実形上の Euler 方程式と同等であることが知られているため、より詳細な研究を行わざるを得なくなった。

そこで、任意の実半単純 Lie 環上で任意の Cartan 部分環によって特徴付けられる Euler 方程式を考え、孤立平衡点の安定性を解析することを目指して研究を行った。結果的として、Euler 方程式を特徴付ける Cartan 部分環の共役類によって Euler 方程式の平衡点の安定性 (より詳しくは Williamson 型) が決定されることがごく最近になって示された。この結果の導出には、ルートの実性・純虚性・複素性による分類が大きな役割を果たした。

現在、符号数 (p, q) のスカラー積に関する擬ユニタリ行列のなす A 型実単純 Lie 群 $SU(p, q)$ の場合に詳しい分析を行っており、 $SU(p, q)$ と正規実形 $SL(p+q, R)$ との交叉 (符号数 (p, q) のスカラー積に関する擬回転行列のなす Lie 群 $SO(p, q)$) に定義される Euler 方程式の可積分性や平衡点の安定性解析を試みている。

以上の新しい結果については、まともな次第順次出版する。これらの結果は将来

的には、任意の 2 つの実形の交叉について、誘導される Euler 方程式の可積分性および平衡点の安定性を解析することにつながることを期待される。

以上の結果については、スイスおよび中国の大学に所属する共同研究者と共同で行われた研究結果に基づく。

- (2) 剛体に関する完全積分可能な Hamilton 力学系については、自由剛体の力学系に関する〔雑誌論文〕および (フランスの研究者との共同研究に基づく) が出版されている。2012 年に出版された私と国内の研究者による共著論文で、自由剛体の力学系に付随して Lagrange トーラスの複素化として得られる楕円曲線族から 3 次元複素射影空間上の楕円ファイバー空間が定義され、力学系の分岐現象との関係が明らかになっている。この楕円ファイバー空間のモノドロミーと、力学系の平衡点 (特異点) の近傍で定義される Birkhoff 標準形 (Morse の補題による関数の標準形のシンプレクティック幾何学版) の解析接続により生じるモノドロミーとの関係を明らかにしたのが

および の内容である。は の解説および単振子のモノドロミーを求めた研究結果がまとめられている。同種の問題について、対称コマ (Lagrange のコマ) の完全積分可能な Hamilton 力学系に対しても考察を始めている。Lagrange トーラスの複素化として楕円曲線上の射影直線によるファイバー束 (線織面) が得られることがわかっていて、今後、この線織面族の特異点 (退化) について、考察し力学系の分岐現象や Birkhoff 標準形との関係を明らかにする。また、同じく剛体の運動が関係する完全積分可能系として Kowalevsky のコマや Clebsch のコマ等についても、複素代数幾何学的観点から Lagrange トーラスの複素化によって得られる複素曲面の族の退化と力学系の分岐現象や Birkhoff 標準形との関係を解明する。

なお、Clebsch のコマに関するトピックとして、光学における Maxwell 方程式と深い関係にある quadric line complex から現れる二重ファイバー空間の特異ファイバーの分類についても研究を開始している。今後、Clebsch のコマと quadric line complex との関係も考慮に入れながら研究を続ける。

- (3) (1) に関連する Lie 群の左不変計量に関する測地流の完全積分可能性は、重要な問題である。これまで私は主に半単純 Lie 群やコンパクト Lie 群のみを扱ってきたが、この研究を遂行する途中で、べき零 Lie 群に関して完全積分可能性を確認する必要が生じた。これは、sub-Riemann 幾何学の観点からも興味深

い問題である。私はドイツの共同研究者とともに Heisenberg 群を一般化したステップ 2 べき零 Lie 群である擬 H 型 Lie 群および付随するべき零多様体について、測地流の完全積分可能性を証明した。この結果については、現在論文を学術雑誌へ投稿中である。今後は、測地流を決定する計量に関する Laplace 作用素の張局所解析との関係を調べることにより、量子力学系との関係を明らかにしてゆく。

- (4) Bloch-Iserles 系の安定性解析を行った理由の一つは、系の戸田格子とのアナロジーにより行列の数値計算アルゴリズムとの関係がある可能性が在るからであった。Bloch-Iserles 系の孤立平衡点は楕円型(Lyapunov 安定)であることは、スイスおよび中国に所属する共同研究者との研究により明らかになっている。現在のところ、数値計算アルゴリズムとの関係は明らかになっていないが、今後の研究でこの関係も明らかにしたい。

その他、Weierstrass 標準形による実多様体上の楕円ファイバー空間の構成についても、全空間上の幾何構造の解明をする予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Tudor D. Ratiu, Daisuke Tarama, The $U(n)$ free rigid body: Integrability and stability analysis of the equilibria, *Journal of Differential Equations*, 査読有, 259, 2015, 7284-7331. DOI: doi.org/10.1016/j.jde.2015.08.021

Jean-Pierre Francoise, Daisuke Tarama, Analytic extension of the Birkhoff normal forms for the free rigid body dynamics on $SO(3)$, *Nonlinearity*, 査読有, 28, 2015, 1194-1216. DOI:10.1088/0951-7715/28/5/1193

Daisuke Tarama, Jean-Pierre Francoise, Analytic extension of Birkhoff normal forms for Hamiltonian systems of one degree of freedom simple pendulum and free rigid body dynamics, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B52, 査読有, 2014, 219-236.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B52/pdf/B52-13.pdf>

[学会発表](計 33 件)

Daisuke Tarama, Stability analysis of equilibria for the Mishchenko-Fomenko geodesic flow on a real semi-simple

Lie group with respect to an arbitrary Cartan subalgebra, *Geometric and Singular Analysis* 2018, 2018 年.

Daisuke Tarama, Complete integrability of geodesic flow on pseudo-H-type nilpotent Lie groups, 11th International Conference on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics (ICCA11), 2017 年.

Daisuke Tarama, Integrability of geodesic flow on nilpotent Lie groups of pseudo-H-type, Conference Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics (FDIS 2017), 2017 年.

Wolfram Bauer, 多羅間 大輔, Integrability of geodesic flow on step-two nilpotent Lie groups of H-type with respect to a left-invariant metric, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年.

Daisuke Tarama, Complete integrability of geodesic flow on step-two nilpotent Lie groups, *Geometric and Singular Analysis*, 2017 年.

Daisuke Tarama, Elliptic fibrations arising from free rigid bodies, Conference "Integrable systems," 2016 年.

Daisuke Tarama, Some double fibrations arising from quadric line complexes, The 4th Workshop "Complex Geometry and Lie Groups," 2016 年.

Daisuke Tarama, Stability analysis for generalized free rigid body dynamics on real semi-simple Lie algebras, Workshop "Geometric and Singular Analysis," 2016 年.

Daisuke Tarama, Stability analysis for certain generalized free rigid bodies, 3-rd Conference on Finite Dimensional Integrable systems in Geometry and Mathematical Physics 2015, 2015 年.

多羅間 大輔, "Stability analysis for the free rigid body dynamics on normal and compact real forms of complex semi-simple Lie algebras," 2015 年度日本数学会年会, 2015 年.

Daisuke Tarama, Stability analysis for the free rigid body on $U(n)$, 30th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Group30), 2014 年.

Daisuke Tarama, Quantum mechanics for certain generalized free rigid bodies, *Geometric and Singular Analysis*, 2015 年.

多羅間 大輔, Stability analysis for

the free rigid body dynamics on $U(n)$,
2014 年度日本数学会秋期総合分科会 ,
2014 年 .
他 20 件 .

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

多羅間 大輔 (Daisuke Tarama)

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号 : 30722780