

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26870316

研究課題名(和文)代数多様体のモジュライ, 退化とK安定性

研究課題名(英文)K-stability, degeneration of algebraic varieties

研究代表者

尾高 悠志(Odaka, Yuji)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号:30700356

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文):代数多様体または数論多様体のモジュライ及び安定性についての研究が進展した。K安定でsmoothableなFano多様体のコンパクトなモジュライ代数空間の構成を行った。また、一つにはK安定性の数論/アラケロフ幾何学的な理論の基礎を確立し、ファルティンクス高さを一般の数論多様体に拡張したモジュラー高さを導入し、極小モデルプログラムやリッチ流、チャウ高さとの関連を証明した。同時に(安定な)代数多様体のモジュライ空間のトロピカル幾何学的コンパクト化の概念を定義し、具体的な構造を研究した。幾何的ミラー対称性やトロピカル幾何学、非アルキメデス幾何学とも関わる。K安定性の理論を一般化した。

研究成果の概要(英文): I improved the understanding of stability and moduli of algebraic varieties or arithmetic varieties. I constructed compact algebraic space of KE Fano smoothable varieties. I generalized so-called Faltings height to general arithmetic varieties as modular heights, and then established the basic of arithmetic or Arakelov theoretic aspect of the K-stability and canonical Kahler metrics. I also introduced what I call tropical geometric compactifications of moduli spaces and studied the structure in details. It is closely related to geometric aspect of Mirror symmetry (after Strominger-Yau-Zaslow), tropical geometry and non-archimedean geometry.

研究分野: 代数幾何学とその関連分野

キーワード: モジュライ空間 安定性 標準Kahler計量

1. 研究開始当初の背景

代数多様体とは多くの数学分野において自然に出てくる幾何学的対象で、多項式の零点集合として古典的に調べられてきたものである。そうした空間をパラメトライズするモジュライ空間及びその構成に元来動機付けられた安定性についての研究は、代数幾何における重要なテーマであり続けていた。

それらは同時に、当初の導入動機に限らず、現在においては数論幾何や微分幾何やミラー対称性等多くの分野に関わる他側面の動機を持つ。

2. 研究の目的

代数多様体のモジュライ空間及びそのコンパクト化の構成が一つの主要な目的であった。

その一方では、他分野との関連を明確にするのがもう一つの目的である。

3. 研究の方法

基本的には個人単位での思考の連続により研究を推し進めてきたが、時折研究集会などによる議論や共同研究を行い、そうした関連研究者との交流との刺激の中で進めた。

4. 研究成果

高次元の代数多様体または数論的代数多様体のモジュライ空間及び安定性についての研究及び理解が進展した。

まず(K安定な)Fano多様体のモジュライ理論の基礎が確立した。(論文(2)など)。これはその前まではっきりと予想さえ述べられていなかったものを2012年頃に申請者らが(満洲・向井の先駆的研究も参考にしながら)定式化と同時に推し進め、それをさらに発展させる形で確立したものである。特にコンパクトなモジュライ代数空間の存在を証明した。

また一つには、数論的代数多様体の交点理

論の発想に基づいたアラケロフ幾何学とK安定性やケーラー・アインシュタイン計量等の標準的なケーラー計量との関連に関する代数幾何的な色彩の強い基礎づけをし、その副産物として特にファルティンクス高さを一般の数論多様体に拡張したモジュラー高さを導入した。

その中においては双有理幾何学における現代的な手法の中心にある極小モデルプログラムや、昨今の微分幾何学において盛んに使われてきたリッチ流のケーラー版をその枠組みの中で論じた。また、より古典的な射影幾何学における射影代数多様体に数論的構造を付随させたものに対するチャウ高さがS-W.ZhangやJ-B.Bostらによって研究されてきたが、それとの関連を明瞭にした。当該論文(3)においては、さらに従前のYau-Tian-Donaldson予想の数論幾何学的深化を意味する「数論的Yau-Tian-Donaldson予想」ならびに「数論的K安定性」を提唱している。

これらの研究は申請者による昔の純粋に代数幾何学的なK安定性の基礎理論を端に欲してもとにしたものである。

同時に(安定な)代数多様体のモジュライ空間のトロピカル幾何学的コンパクト化の概念を定義した。微分幾何におけるグロモフハウスドルフ収束の観念を利用して、それをFano多様体のモジュライのコンパクト化に利用するというを以前行っていたが、それを他の「崩壊する(次元が減る)」代数多様体の場合に適応したものであり、幾何学的なミラー対称性の観点からも重要であるということが動機を後押しした。実際にそうしたコンパクト化を構成して、その具体的な構造を綿密に研究した。幾何的ミラー対称性だけでなくトロピカル幾何学、非アルキメデス幾何学とも関わることからその名前をつけた。この研究はその後の共同研究においてまた新しい視点が導入され、さらに発展している最中である。(現在進行形)

藤田健人氏(京都大学数理解析研究所助教)とは当該研究費の内定の数年前よりK安定性の代数的基礎に関する議論を多く行ってきた。その中でFano多様体のK安定性の判定の手法として(従前よりあるアルファ不変量の強すぎる不備を補うような)「デルタ不変量」を導入して、その基礎付けの論文を執筆した。これらはその前のC.Liや藤田氏本人の研究に基づいたものである。これも発表以来、諸外国で注目を頂いていて、この報告書を書いている時点でも現在進行形で様々な発展があるようだ。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔学会発表〕 (計 11 件)

〔雑誌論文〕 (計 4 件)

1.

●発表者名：尾高悠志

1. Yuji Odaka

発表標題：

A "strange" compactification of M_g with cellular boundary, its background and its extensions

Invariants of varieties and singularities inspired by Kähler-Einstein problems

学会等名：リーマン面に関連する位相幾何学

Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.
Volume 91, Number 4 (2015), 50-55.

発表年月日：H27 8月27日

発表場所：東京大学

査読あり。

講演の種類：招待

2.

●発表者名：尾高悠志

2. Yuji Odaka

発表標題：Kähler-Einstein多様体のモ

Compact moduli space of Kähler-Einstein Fano varieties

ジュライ空間とその標準的コンパクト化

Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences (2015), 51(3): 549-565

学会等名：日本数学会特別講演

発表年月日：H28 3月23日

発表場所：明治大学

査読あり。

講演の種類：招待

3. Yuji Odaka

3.

●発表者名：尾高悠志

Canonical Kähler metrics and Arithmetics -- Generalising Faltings heights

to appear in Kyoto Journal of Math

発表標題：Tropical geometric

査読あり。

compactification / Arithmetic Kstability - generalized Faltings heights

4. Yuji Odaka, Kento Fujita

学会等名：Complex analysis and

On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors

algebraic geometry workshop

発表年月日：H28 5月12日

to appear in Tohoku Math Journal

発表場所：Chalmers工科大学

査読あり。

講演の種類：招待

4.

●発表者名：尾高悠志

数値的最小化としての極小モデルプログラム、Faltings高さ及びKahler-Einstein計量

学会等名：東北大学代数セミナー

発表年月日：H28 6月30日

発表場所：東北大学

講演の種類：招待

5.

●発表者名：尾高悠志

発表標題：Generalizing Faltings height

学会等名：第3回日台整数論研究集会

発表年月日：H28 9月23日

発表場所：台湾大学

講演の種類：招待

6.

●発表者名：尾高悠志

発表標題：On compactifying moduli of Kahler-Einstein manifolds

学会等名：Algebraic geometry -old and

new- (Clay math institute)

発表年月日：H28 9月27日

発表場所：Oxford大学

講演の種類：招待

7.

●発表者名：尾高悠志

発表標題：On compactifying moduli of Kahler-Einstein manifolds

学会等名：Algebraic geometry -old and new- (Clay math institute)

発表年月日：H28 9月27日

発表場所：Oxford大学

講演の種類：招待

8.

●発表者名：尾高悠志

発表標題：Two non-complex viewpoints Kahler-Einstein manifolds on the Kahler-Einstein geometry

学会等名：複素幾何シンポジウム

発表年月日：H28 11月1日

発表場所：金沢市 しいのき迎賓館

講演の種類：招待

9.

●発表者名：尾高悠志

発表標題：On compactifying moduli of Kahler-Einstein manifolds

学会等名：Young mathematician lecture (event day), Higher

Dimensional Algebraic Geometry, Holomorphic Dynamics and Their Interactions

発表年月日：H28 1月18日

発表場所：シンガポール大学

講演の種類：招待

10.

●発表者名：尾高悠志

発表標題：Canonical metrics, moduli-theoretic heights, and singularities.

学会等名：KTGU workshop for young
researchers (plenary)
発表年月日：H28 2月20日
発表場所：京都大学

尾高悠志 (YUJI ODAKA)

機関：京都大学

部局：理学研究科

職：准教授

講演の種類：招待

11.

●発表者名：尾高悠志

研究者番号：30700356

発表標題：On Compactifying Moduli of
Kahler-Einstein manifolds

(2)研究分担者

学会等名：KAKENHI kickoff symposium

(3)連携研究者

発表年月日：H28 2月22日

発表場所：京都大学

講演の種類：招待

(4)研究協力者

()

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者