

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成30年 6月28日現在

機関番号：34204

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26870696

研究課題名(和文)量子古典対応の数理と逆正弦法則

研究課題名(英文) Mathematics of Quantum-Classical correspondence and the Arcsine law

研究代表者

西郷 甲矢人 (Saigo, Hayato)

長浜バイオ大学・バイオサイエンス学部・准教授

研究者番号：80615154

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：現代物理学の根幹である量子物理学とそれ以前の古典物理学とを橋渡す「量子古典対応」の考えを、「量子確率論」という現代数学の一分野の枠組みの中で再定式化することで、「逆正弦法則」という重要な確率分布が数理学において果たす普遍的な役割を明らかにした。具体的には、「直交多項式」「量子ウォーク」「ヘッケ環」といった重要な数学的対象の振る舞いや構造を、量子古典対応の数理を通じ、「逆正弦法則」やその類似物によってとらえることに成功した。

研究成果の概要(英文)：The idea of "quantum classical correspondence", which unifies the quantum physics and the world of classical physics, is reformulated in the framework of a branch of modern mathematics called "quantum probability theory". The universal roles played by "the Arcsine law" in the realm of mathematical sciences are clarified. For instance, the behavior and structures of important mathematical objects such as "orthogonal polynomials", "quantum walks" and "Hecke rings" are analysed in terms of the Arcsine law from the viewpoint of quantum probability.

研究分野：数理物理・量子確率論

キーワード：量子古典対応 逆正弦法則 直交多項式 量子ウォーク ヘッケ環

## 1. 研究開始当初の背景

量子論は現代物理学の根幹をなす理論である。その黎明期に重要な役割を果たしたのが、「量子古典対応」の原理であった。すなわち、量子論の予言は、「極限において」古典論のそれと一致すべし、という指導原理である。

自然がミクロとマクロとに断絶しているわけではない以上、この原理を仮定することは理にかなっているが、実際にこの原理から、「直接は目に見えない」世界である原子レベルの数理的構造が推測されたのであった。

一方、現在においてもこの原理は、ミクロからマクロがいかに創発するかを明らかにするという問題意識につながっている。たとえば小嶋泉の提唱する「ミクロ・マクロ双対性」は、この原理の現代的な発展形であると言える。

このように重要な量子古典対応の考えであるが、その具体的な適応については事欠かない一方で、そこに共通する構造を「数理」として取り扱う試みはなされていないように見えた。これをやりたい、というのが報告者の研究動機であった。

量子論と古典論は、通常、「まったく違った形式で」述べられる。たとえば、古典的な物理学における確率論の使用と、量子論的な確率の使用とは「全く違ったものだ」という意識が浸透しており、それらを統一的に扱うことはそもそも無理であるかのように思われがちである。もしそうであれば、量子古典対応というものは、全く違った形で計算したその計算結果自体が古典極限において一致する、というようなものとなりがちであり、いったい「何が」起こることによってその極限が古典と一致することになるのか、必ずしも明らかとは言えない。

しかし、実は数学の一分野に、量子と古典との双方を「統一的に扱う」枠組みが存在する。それが「量子確率論」と呼ばれる分野である(代数的確率論、非可換確率論ともよぶ)。量子確率論は、ポルンの確率解釈やフォンノイマンの『量子力学の数学的基礎』に端を発し、ゲルファントらによる $*$ -代数の表現定理の確立を経て、「 $*$ -代数とその上の状態」を「確率空間の一般化」と見る立場から整備されてきた。

ここで、 $*$ -代数というのは、物理学でいうところの「物理量」の代数に相当する。また、状態はもちろん物理学における状態に相当するが、これは系と環境との相互関係において定まる統計的な法則であり、これを「期待値をあたえる汎関数」として定式化する。

数学的にいえば、状態とは「 $*$ -代数の上で定義された線型・正值・単位的な写像」として定義される。線型性は「足してから期待値をとることと、期待値をとってから足すことは同じ」ということの表現であり、「正值」とは「正」になる量は期待値も正となる、ということでこれは確率の正值性に対応する。そして単位的であるというのは単位元1は1にうつる、ということであり、これは確率の総和が1となることに対応する。

このような「代数とその上の状態」との組は、古典的な確率論と量子論的な確率法則との双方を自然に包含する。代数が可換であるときには、この組から通常の古典的な確率空間が定まる(正確に言えば位相的な条件が重要であるが、ここでは措く)。また、代数が非可換である場合にも、この代数と状態とからヒルベルト空間を構成し、その上の作用素の代数へもとの代数を表現でき、しかも、状態はその空間の単位ベクトルで挟んで内積をとる、という写像として表現可能である(これを、ゲルファント・ナイマルク・シーガルの頭文字をとってGNS表現とよぶ)。

これにより、通常の枠組みにおける量子力学の定式化も再構成できる。こうしたことを踏まえ、「代数と状態の組」を「量子確率空間」という(これが量子や古典にかかわらず、あるいは古典確率論にも量子力学にも拘わらない応用をも持つ一般的なものであることを示すことを示すため、「代数的確率空間」あるいは「非可換確率空間」と呼ぶ場合もある)。量子確率論とは、この量子確率空間を出発点とする一般化された確率論であるといえる。

以上の背景に基づき、量子確率論は「量子古典対応の定式化にうってつけの枠組み」であると報告者は考えるに至った。量子古典対応の具体例として、まずは調和振動子における量子古典対応を、量子論でよく使われる「生成消滅演算子」が生成するの代数と、「真空」に生成演算子をかけてえられる状態との組を量子確率空間として

とらえるとき、「たくさん生成演算子をかけてえられる状態」=「高エネルギーの状態」に関しては、スケーリングに比して非可換性の効果が消えることを示した。

そしてそれにより、非可換性のために起きていた「二項定理」からのずれが消失し、生成演算子と消滅演算子との和として与えられる「位置」オペレーターの $n$ 乗の期待値、すなわち $n$ 次モーメントを組み合わせた論的に計算できることに着目した。結果として、その $n$ 次モーメントは $n$ が奇数ならば0となり、偶数ならば中央二項係数に一致することが示された(分散を1に調整したうえで)。

この事実は、次のことを示す：高量子数に対応する状態に関して、位置の確率分布は、「逆正弦法則」に近づく(弱収束する)ことを意味する。逆正弦法則は、ある区間上のみでゼロでなく、その区間の両端において大きい、「逆釣り鐘型」をした確率密度をもつ。

実は、高エネルギーに対応する状態が逆正弦法則に近づくということは、古典的な調和振動子に近づくということの意味する。「真空」に生成演算子をかけていった状態は、エネルギー固有状態であり、不確定性原理からもわかる通り、時間の情報は失われている。そこで古典的な調和振動子を「ランダムな時刻で」スナップショットを撮って位置の分布をみたものが古典極限であろうと考えられるが、果たしてそれは逆正弦法則なのである(そのことは、滞在時間の割合と確率が比例すると考えれば、初等的な微積分によってわかる)！

こうして、調和振動子に関しては、「スケーリングに比して非可換性が消える」という形で量子古典対応を定式化できた。なお、その副産物として、各状態に対応する直交多項式である「エルミート多項式」の漸近的な振る舞いが逆正弦法則を用いて記述できることもわかった。

## 2. 研究の目的

報告者は、上記の背景に踏まえて、量子古典対応を一般的な「量子確率空間」がスケーリング極限において「古典確率空間」を復旧する、という量子古典対応の数理を、「スケーリング極限において非可換性の効果が消える」という形で量子確率論的に定式するとともに、そこから具体的な量

子古典対応の例を簡潔に導出することを目的とした。

さらに、各状態に対応する直交多項式を考えることにより、それらの直交多項式の漸近的なふるまいが逆正弦法則によって記述できないか、また、逆正弦法則によって記述できる条件は何か、を調べることをも目的とした。

## 3. 研究の方法

上記の目的を達するため、研究は以下の二段階で進めることにした。

まず第一に、量子調和振動子の量子確率論における直接の一般化として知られる「相互作用フォック空間」に一般化できないかを考える。また、そこでどの程度の一般的な条件があれば、古典極限として逆正弦法則があらわれるのかを考える

また第二に、上記の結果を応用することで何が得られるのかを考える。とくに、直交多項式の振る舞いについて何がいえるかについて考察する。

## 4. 研究成果

・酒匂宏樹氏との共同研究において、まず、量子調和振動子の場合の量子古典対応と同じ話が、ある種の漸近的な可換性に対応するRAC1(それはヤコビ数列と呼ばれる列の特性によって記述され、直交多項式の有名な「三項間漸化式」を統制する)という条件を満たす相互作用フォック空間において成立し、この場合古典極限は逆正弦法則となることがわかった。

・それに対応し、三項間漸化式に出てくるヤコビ数列がRAC1を満たすような直交多項式に関しては、その絶対値の二乗×「その直交多項式たちがそれに関して直交しているような測度の確率密度関数」が、逆正弦法則に近づく(弱収束する)ことがわかった。なお、ほぼすべての「有名な直交多項式」(定評ある書物の附録にのっているようなもの)はRAC1をみたす。

・一方、RAC1を拡張したRAC2という条件について考えると、RAC1のとき古典極限は逆正弦法則になったのに対し、RAC2であってRAC2になっている場合には、興味深い離散分布が現れた。これ

を「離散逆正弦法則」とよぶ。

・離散逆正弦法則を定めるパラメータ  $c$  を 0 にもっていくと、逆正弦法則に弱収束することが示された。

・離散逆正弦法則についての明示式を得た。 $c$  がゼロでない場合、この離散逆正弦法則は  $c \times$  整数という点にのみ重みをもつ。

・上の明示式に基づき、これが連続時間量子ウォークの理論に現れることを発見し、その分野での「中心極限定理」を上の  $c$  を 0 に持っていくこととしてとらえなおすことに成功した。

・以上の研究結果の成果をもとにして、数論における重要な対象であるヘッケ環の理論への量子確率論の応用を発見することができた。これは、数論や表現論的な文脈への量子確率論の貢献であり、とくに  $p$  進世界における量子確率論のはじめての応用となっている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Takehrto Hasegawa, Hayato Saigo, Seiken Saito and Shingo Sugiyama. A quantum probabilistic approach to Hecke algebras for  $p$ -adic  $PGL_2$ ., 査読有, to appear in Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. (2018)

Naotsugu Tsuchiya, Shigeru Taguchi, Hayato Saigo. Using category theory to assess the relationship between consciousness and integrated information theory., 査読有, Neuroscience Research, 107, 1-7. (2016)  
doi: 10.1016/j.neures.2015.12.007

Izumi Ojima, Kazuya Okamura and Hayato Saigo. Local State and Sector Theory in Local Quantum Physics., 査読有, Letters in Mathematical Physics, 106, 741-763. (2016)  
doi: 0.1007/s11005-016-0841-y

Hayato Saigo and Hiroki Sako. The Arcsine law and an asymptotic behavior of orthogonal polynomials., 査読有, Annales de l'Institut Henri Poincaré D, 3, 405-427.

(2016)

doi: 10.4171/AIHPD/34

〔学会発表〕(計 4 件)

西郷甲矢人、”逆正弦法則、量子古典対応、量子ウォーク”、日本物理学会、大阪大学豊中キャンパス(2017/3/17)

西郷甲矢人、”なぜ逆正弦法則なのか?”, 量子論にまつわる数学と数論の連携探索、早稲田大学早稲田キャンパス (2017/3/8)

西郷甲矢人、”直交多項式の観点から”、量子ウォークを架け橋にした学際交流、横浜国立大学常盤台キャンパス(2016/10/22)

Hayato Saigo, “The Arcsine law and an asymptotic behavior of orthogonal polynomials”, 4-th Yokohama Workshop in Quantum Walks, Yokohama LandMark Tower: 18F room 1809, satellite campus of Yokohama National University, (2016/10/20)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

6 . 研究組織

(1)研究代表者

西郷 甲矢人 ( SAIGO HAYATO )

長浜バイオ大学・バイオサイエンス学部

准教授

研究者番号： 80615154