2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８８７０１０
研究課題名（和文）Heegaard Floerホモロジーとその拡張について

研究課題名（英文）Heegaard Floer homology and its generalization

研究代表者
鮑　園園（BAO, Yuanyuan）

東京大学・大学院数理科学研究科・助教

研究者番号：００７１０８２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：三次元多様体に埋め込まれる二部均衡グラフのHeegaard Floer homologyを研究してきた。このhomologyのオイラー標数はグラフのAlexander多項式であり、古典的な手法で定義される不変量である。今年度、共同研究者と共に、このAlexander多項式はsl(n)量子多項式のMOY関係式に類似した関係式が満たすことを発見した。逆に、これらの関係式を用いて、Alexander多項式の特徴付けを与えた。研究の続きとして、グラフのAlexander多項式の量子トポロジー的な意味を考える予定である。これを通して、Heegaard Floer理論の量子トポロジー的な意味も調べたい。

研究成果の概要（英文）：In the past two years, I studied the Heegaard Floer homology for an embedded bipartite graph in a closed 3-manifold. The Euler characteristic of the homology is the Alexander polynomial, which is a classical invariant in knot theory. During this academic year, my coworker and I found that this polynomial satisfies some relations similar with MOY relations for sl(n) quantum polynomial, and we showed that these relations, in turn, provide a characterization of the Alexander polynomial for a graph. One of the important questions in Heegaard Floer theory is how to understand the theory from the quantum topological viewpoint. In the future, we will study the quantum topological meaning of the Alexander polynomial and then that of its categorification, the Heegaard Floer homology.

研究分野：Low-dimensional Topology

キーワード：Heegaard Floer　graph　Alexander polynomial　MOY relation

1. 研究開始当初の背景

(1) Heegaard Floer homology (HF) は三次元多様体及びその中に埋め込まれる結び目や絡み目の不変量として、多くの位相的な応用が知られている。例えば与えられた二つの結び目はconcordantかどうかを判断するのが古典的、難しい問題である。そのため、様々な concordance 不変量が発見されている。中には、HF から構成された結び目の concordance 不変量が多く存在する。空間グラフは、結び目の拡張であり、量子不変量の構成にも重要な役割を果たしていて、非常に重要な研究対象である。しかし、それに関する位相的不変量がまだ少ない。

(2) HF は Ozsváth と Szabó により、擬正則曲線の moduli 空間を通して定義された。この解析的手法で定義された不変量の計算がとても難しく、一般的には計算できない。2007年ごろ、Manolescu、Ozsváth、Sarkar、Szabó、Thurston らにより、3 球面に埋め込まれる絡み目の HF の組みまわせ的な定義を導入された。この組み合わせ的な定義に関する研究は文献 (1) に含まれている。この定義を利用すれば、3 球面にある絡み目の Floer ホモロジーは計算可能になる。
絡み目の Floer ホモロジーのオイラー標数は Alexander 多項式である。Alexander 多項式について、位相的、代数的、組み合わせ的な解釈などが知られている。特に、量子不変量としての Alexander 多項式は、Jun Murakami、Rozansky と Saleur、Reshetikhin らによって研究された。一方で、HF には、上に述べた解析的な定義と組み合わせ的な定義は存在するが、代数的な解釈はまだよく分かっていない。

2. 研究の目的

(1) 三次元多様体に埋め込まれるグラフの HF を定義し、その性質を調べ、グラフに対する位相的な応用を考えるのが本研究の目的の一つであった。

(2) 結び目やグラフの HF の代数的な構造、例えば TQFT の構造を持つかどうかを調べ、HF の代数的な意義を考えるのがもう一つの研究目的であった。

3. 研究の方法

(1) 三次元多様体には結び目があるとき、Ozsváth と Szabó、そして Rasmussen により、三次元多様体の Heegaard Floer complex に結び目に依存する Alexander filtration が定義され、その filtered chain complex のホモトピー型は結び目の位相的不変量になることが証明された。この不変量は結び目の HF と呼ばれる。グラフの場合、グラフに依存する Alexander filtration をどのように定義するかが研究のカギになる。

(2) 本研究と同時期に、三次元球面にあるブレイドの HF が Vertesi と Petkova により定義され、そして TQFT の構造を持つことが証明された。ブレイドを空間グラフまで拡張し、それに対応すべき TQFT を考える予定であった。この研究を遂行するため、グラフの射影図を利用して、グラフの HF を研究する必要性が生じた。

4. 研究成果

(1) 二部均衡グラフの HF を定義した。その手順は次のとおりである。i) グラフの各辺には、その向きにより、w 基点または z 基点を導入し、グラフの基点付き Heegaard 分解を考える。ii) Ozsváth と Szabó により、w 基点と Heegaard 分解を用いて、三次元多様体の Heegaard chain complex を構成することができる。iii) z 基点を用いて、グラフの Alexander grading を定義する。三次元多様体の Heegaard Floer complex の境界作用素をこの grading を保つように修正し、グラフの Heegaard Floer complex を定義する。Alexander grading 以外、Maslov grading という homological grading も存在する。グラフの Heegaard Floer complex の境界作用素は Alexander grading を保ち、Maslov grading を一つ下げる。

(2) 三次元空間にあるグラフ、つまり空間グラフに対して、その平面上の射影図を用いて、ステップ i) の Heegaard 分解を構成することができた。本研究ではこの Heegaard 分解を利用し、二つの grading の計算方法を空間グラフの射影図の上で具体的に与えた（図１）。一つの系として、平面的グラフに対応する Heegaard Floer complex の境界作用素は自明になり、そのためそれらの HF は完全に計算することができた。

(3) グラフの HF のオイラー標数はグラフの Alexander 多項式であり、古典的な手法で定義できる不変量である。私はこの Alexander 多項式の

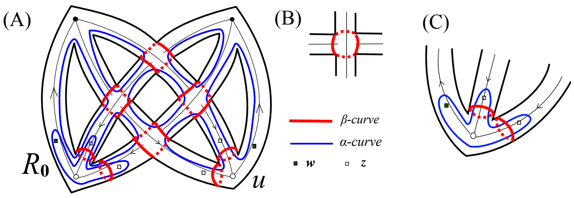

図 1: グラフの射影図を利用し、グラフに対する Heegaard 分解を構成した。

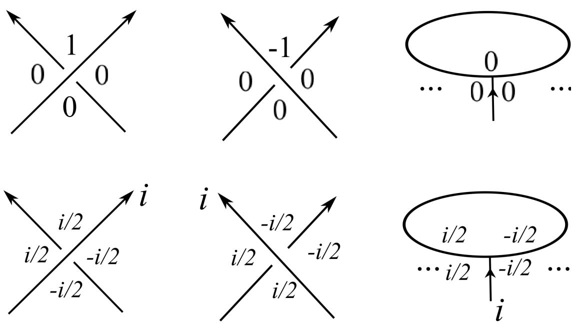

図 2: グラフの射影図を利用して、HF の Alexander grading と Maslov grading を与えた。

計算法を射影図を利用して具体的に与えた。今年度、共同研究者の呉忠涛氏と共に、この Alexander 多項式を修正し、色が付いたフレミングを持つグラフの不変量になることを証明した。そして、この Alexander 多項式は $\mathfrak{sl}(n)$ 量子多項式の MOY 関係式 [文献 (2)] に類似した関係式を満たすことを発見した。逆に、これらの関係式を用いて、Alexander 多項式の特徴付けを与えた。現在この研究に関する論文は執筆中である [3]。一方、Viro [4] によって、量子群 $U_q(\mathfrak{gl}(1,1))$ と $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ の表現に対応するグラフの Alaxander 多項式が定義された。今後、我々定義した Alexander 多項式と Viro の仕事との関係について調べる予定である。Heegaard Floer 理論と量子トポロジーの関係について、多くの研究者によって研究されている。今後の研究では、グラフの Alexander 多項式の量子トポロジー的な意味を考える予定である。これを踏まえて、Heegaard Floer 理論の量子トポロジー的な意味も調べたい。

＜引用文献＞

(1) P. Ozsváth, A. Stipsicz and Z. Szabó, Grid Homology for Knots and Links, Mathematical Surveys and Monographs Vol. 208, 2015.

(2) H. Murakami, T. Ohtsuki and S. Yamada, HOMFLY polynomial via an invariant of colored plane graphs, Enseign. Math. 44 (1998), pp. 325–360.

(3) Y. Bao and Z. Wu, The Alexander polynomial for a balanced bipartite graph and its MOY-like relations, preprint.

(4) O. Viro, Quantum relatives of the Alexander polynomial, St. Petersburg Math. J. Vol. 18 (2007), No. 3, pp 391–457.

5. 主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

(i) Yuanyuan Bao:“Heegaard Floer homology for embedded bipartite graphs”, 数理解析研究所講究録, 査読無. **2004** (2016) 1–12.

(ii) Yuanyuan Bao：“Polynomial splittings of Ozsváth and Szabó’s d-invariant”, Topol. Proc, 査読有. **46** (2015) 309–322.

〔学会発表〕（計　3　件）

(i) Yuanyuan Bao:The Alexander polynomial of a bipartite graph, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics, 東京大学, 2017 年 2 月.

(ii) Yuanyuan Bao：The skein relation for the Alexander polynomial of a bipartite graph, トポロジー金曜セミナー, 九州大学, 2016 年 11 月.

(iii) Yuanyuan Bao：Heegaard Floer homology for embedded bipartite graphs, Intelligence of Low-dimensional Topology, 京都大学, 2016 年 5 月.

(iv) Yuanyuan Bao：Heegaard Floer homology for transverse graphs with sinks and sources, Atelier de travail franco-japonais sur la géométrie des groupes modulaires et des espaces de Teichmüller, 日本，東京大学, 2015 年 11 月.

(v) Yuanyuan Bao:Heegaard Floer ホモロジーについて, 情報数理談話会, 東北大学情報科学研究科, 2015 年 7 月.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

無し

６．研究組織

(1) 研究代表者
鮑 園園 (BAO, Yuanyuan)
東京大学・大学院数理科学研究科・助教
研究者番号: 00710823

(2) 研究分担者
いない

(3) 連携研究者
いない

(4) 研究協力者
呉忠涛（WU, Zhongtao）