2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２８　年　１０　月　２４　日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８８７０２７

研究課題名（和文）非線形放物型方程式に内在する非自己相似的な特異性構造の解明

研究課題名（英文）Investigation of non-self-similar singularity mechanisms in nonlinear parabolic equations

研究代表者
関　行宏（SEKI, YUKIHIRO）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・助教

研究者番号：５０７２８９７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では非線形偏微分方程式、特に２階単独方程式の中で最も単純な形をしたべき乗型半線形熱方程式モデル方程式として特異性の解析を行った。有限時間のうちに解の有界性が失われる現象を解の爆発と呼ぶ。爆発する解の分類は1980年代頃からの始まる大きなテーマの一つであり、方程式の非線形性の度合いと密接な関係がある。本研究では既存の研究では得られていなかった非線形項のべきがある閾値に等しい場合に非自己相似的な爆発を起こす解を接合漸近展開の方法を用いて構成した。さらに応用として球面に値を取る調和写像流方程式を扱い、高次元の場合に未解明であった非自己相似的特異性を示す特殊な解の構成を行った。

研究成果の概要（英文）：In this research I studied singularity formation of solutions of nonlinear heat equations with power-like nonlinearity as a typical model equation of second-order nonlinear PDEs. The phenomenon of loosing boundedness of solution in a finite time is called blow-up of solution. Classification of blow-up solutions are one of the main theme of this topic since 1980s. This problem has deep relation with the nonlinear structure of the equation. In this research I constructed, by means of matched asymptotic expansions, blow-up solutions that exhibit non-self-similar blow-up mechanisms in the case that the power is equal to a threshold value, which haven't been dealt with in the literature. As its application, I studied singularity formation of harmonic map heat flow with values in a sphere and obtained particular solutions that exhibit non-self-similar singularity, which was unknown in high space dimensions.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：特異性解析　Type II　半線形熱方程式　調和写像流方程式

１．研究開始当初の背景

(1)半線形熱方程式の解の爆発

藤田方程式と呼ばれるべき乗型半線形熱方程式、及び指数関数型の非線形項を持つ２階放物型方程式は非線形偏微分方程式の典型的モデル方程式として1960年代から研究されており、現在でも活発な研究が世界的に続けられている。特に、1980 年代の Giga-Kohn による一連の研究によって「後方自己相似解」、「漸近自己相似爆発」の概念が導入され、その後の非線形偏微分方程式の研究に多大な影響を与えた。後方自己相似解と同じ速さの爆発を「Type Ｉ 爆発」と呼び、そうでない爆発を「Type II 爆発」と呼ぶ。非線形項がべき型の場合は指数がソボレフ劣臨界にあるとき、任意の爆発は Type Ｉ であることは既に知られている。一方、空間次元が 11 以上で非線形項の指数がいわゆる Joseph-Lundgren 指数を超える場合に Type II の爆発を示す解（以後、Type II 爆発解と呼ぶ）の存在が知られている(Herrero-Velazquez, 1994)。その後、その解を基にして一般の球対称な Type II 爆発解の研究が進んでいる。これらの Type II 爆発解は特異定常解と呼ばれる特殊な解のまわりにおける線形化作用素の安定な固有モードに対応しており、有界な定常解の適当なスケール変換を施したものを一緒に考えた接合漸近展開が本質的な爆発の構造を決定している。一方で、線形化作用素がゼロを固有値として持つ場合や安定性と不安定の分かれる境目となる状況ではより詳細な解析が必要となるため、研究が進んでいなかった。

(2) 調和写像流方程式に対する爆発問題

調和写像流方程式は球面に値をとるものに限定しても一般に解は時間大域的に存在せず、有限時間で爆発しうることが知られている。方程式の自己相似構造を用いて(1)と同様に Type Ｉ 爆発、TypeII 爆発の概念が定義される。特に Type Ｉ 爆発の概念は爆発後の延長解の一意存在とも関係し、多くの研究者によって研究がなされている。Type II 爆発についての研究はごく最近になるまで手付かずであったが、最近空間３次元の場合に Raphael-Schweyer がエネルギー臨界構造を利用して Type II 爆発解の構成を行っている。より高い次元の場合についてはこれまで研究がなされていなかった。

２．研究の目的

本研究ではそれまで扱われてこなかった線形化作用素の零固有値を正面から取り扱い、零固有値に対応する爆発構造を詳細に調べることが目的である。それは既存の研究ではそもそも零固有値が現れないか、その影響が無視できる状況しか考えられていないからである。これは零固有値に対応する爆発の構造については全く解明されていないことを意味する。

一方、これらの解析は他の方程式にどの程度応用可能かを調べることも興味深い問題である。これまでも例えば走化性方程式や吸収項の付いた熱方程式等に応用されて来たが、いずれも解そのものの値に注目したものである。これに対し、調和写像流方程式は解の空間微分の有界性が本質的であり、実際解の爆発はその一階導関数がある時刻で非有界となることと同値である。この場合で藤田型方程式とどの程度類似の結果が期待され、どのような本質的違いが現れるかといった問題は十分に解明されていない。顕著な違いとして藤田型方程式ではすべての次元において Type Ｉ爆発解が存在するのに対し、調和写像流方程式では特定の空間次元によっては Type II 爆発（あるいは Type Ｉ爆発）しか起こらない。Type I 爆発については既にいくつかの結果が知られているが Type II 爆発の解析については前項で述べたようにごく少数の事実しか明らかにされていない。本研究の第２の目的はこの未解明な部分を明らかにすることである。

３．研究の方法

(1) 半線形熱方程式の解の爆発

基本的枠組みとしては接合漸近展開法に基づく Herrero-Velazquez による Type II 爆発解の構成法に沿うが、前述の通り、零固有値の取り扱いが本質的である。常微分方程式論では古くから一般論が整備されており、ある平衡点の安定性を調べるにはその点における線形化作用素の固有値を解析すればよい。特に固有値がすべて安定（実部の符号が負）であればその平衡点は漸近安定であることが示される。この考え方を偏微分方程式に応用すると適当な関数空間の上における常微分方程式に書き換えた上で線形化を行い、そのスペクトルを解析することになる。特に、安定な固有値に対しては解の挙動は方程式の線形部分(即ち，線形化方程式)のみによって支配されるが，零固有値に対応するモードが支配的となる場合はそもそもその定常解に収束するかどうかは自明ではなくなる。従って、解の収束性は方程式の高次項に大きく左右され、より繊細な計算が必要となる。無限次元力学系の観点からは中心多様体上のダイナミクスを調べることに相当する。ここに零固有値を取り扱う上での一般的な困難性がある。

(2)調和写像流方程式に対する爆発問題

爆発解の構成においては藤田方程式における特異定常解に相当する特殊な解への収束性を議論する必要があるが、本研究では定数解がその役割を果たし、その解への収束が一様でないことから解の一階微分の爆発が示される。ただし、単調増加でない三角関数を非線形項として取り扱う必要があるなど、この方程式特有の困難性を乗り越える必要がある。一方で三角関数はテイラー展開を施すと奇数次の項しか現れないといった特殊な構造を有しており、ある意味で構造が単純な部分があるため、高次項の効果を見易いといった一面も持つ。そこで零固有値が存在する場合(空間 7 次元のとき)の解析を(1)と並行して行うことによって研究の相乗効果を狙った。

４．研究成果

(1)半線形熱方程式の解の爆発

線形化作用素が零固有値を持つ場合について、その代表的な非線形項の指数を一つ固定して考察を行った。その結果、空間次元の大きさによって爆発解の構造が本質的に異なることを発見した。それらを踏まえ、接合漸近展開法を用いて計画段階で想定していた形式解の構成に成功した。厳密解の構成に取り掛かる前に、当初の計画段階では想定していなかったが、これまでの手法を応用して非線形項の指数が Joseph-Lundgren 臨界指数に一致している場合を考察した。この場合は安定固有値の場合であっても Type II 爆発解の存在・非存在は未解決な問題として残されていたが、上記の手法を精密化することにより、この未解決問題に対する肯定的な漸近解析的結果を得た。これは形式的ではあるが、漸近展開における主要項を完全に求めてあり、十分な信頼性を持つ結果と言える。
さらにその成果を踏まえ、完全な証明を与えることで漸近解析による結果の正当化を行った。計算量がかなり必要なため予想以上に時間を要しているが、現在論文にまとめる作業を急いでいる。

(2) 調和写像流方程式に対する爆発問題

空間次元が 7 以上の場合に安定固有値に対応する Type II 爆発解を完全な証明を込めて構成した。この結果をボン大学のポスドクである Pawel Biernat 氏との共著論文としてまとめ、現在学術専門誌に投稿中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　9　件）

<u>関行宏</u>，On type II blow-up mechanisms in the semilinear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent，応用数学に関する勉強会（応用数学セミナー）@芝浦工大，2016 年 5 月 25,日 芝浦工業大学大宮キャンパス.

<u>関行宏</u>，On type II blow-up mechanisms in the semilinear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent，非線形解析セミナー，2015 年 10 月 30 日，慶応義塾大学理工学部.

<u>Yukihiro Seki</u>，Description of singularity mechanisms in nonlinear parabolic equations，多階層解析と幾何解析の夏の学校 "Summer School on multiscale and

geometric analysis", 2015年7月30日, 北海道大学理学部.

Yukihiro Seki, On type II blow-up mechanisms in the semilear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent, The 7th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2015年3月4日, 名古屋大学理学部.

関行宏, On type II blow-up mechanisms in the semilinear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent, NLPDEセミナー, 2015年1月23日, 京都大学理学部.

関行宏, On type II blow-up mechanisms in the semilear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent, 岡山偏微分方程式小研究集会, 2014年12月1日, 岡山大学理学部.

関行宏, 藤田方程式に内在するType II 爆発構造について, 三大学偏微分方程式セミナー, 2014年11月19日, 国士舘大学世田谷キャンパス.

関行宏, On type II blow-up mechanisms in the Fujita equation, 釧路偏微分方程式研究集会, 2014年10月12日, 北海道教育大学釧路校.

Yukihiro Seki, On type II blow-up mechanisms in the semilear heat equation with critical Joseph-Lundgren exponent, 第39回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 2014年8月26日, 北海道大学理学部.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織
(1)研究代表者
関 行宏 (SEKI, YUKIHIRO)
九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号:50728970