

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 17 日現在

機関番号：32657

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2014～2015

課題番号：26887034

研究課題名(和文) 導来同値とゴレンシュタイン次元の研究

研究課題名(英文) Derived equivalences and Gorenstein dimension

研究代表者

古賀 寛尚 (KOGA, Hirotaka)

東京電機大学・情報環境学部・助教

研究者番号：30736723

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：射影対象が十分にあるアーベル圏の導来圏へゴレンシュタイン次元の概念を拡張し、ある種の条件を満たす導来同値の下でゴレンシュタイン次元有限な鎖複体の成す部分三角圏が保存される事を示した。これによりゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏の安定圏が保存される事も判明した。ゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏の安定圏が導来同値の不変量として機能するため、この安定圏を計算する研究に重要性をもたらす事が予想される。

研究成果の概要(英文)：We introduce the notion of complexes of finite Gorenstein projective dimension and show that a derived equivalence induces an equivalence between the full triangulated subcategories consisting of complexes of finite Gorenstein projective dimension provided that the equivalence satisfies a certain condition.

研究分野：代数学

キーワード：多元環の表現論 導来同値 ゴレンシュタイン次元 アーベル圏

## 1. 研究開始当初の背景

与えられた環(単位元を持ち結合律を満たす)の表現論的構造やホモロジー代数的性質を解明するにあたり、導来同値の概念は極めて重要な役割を果たしている。二つの環が導来同値であるとは、それぞれの有界導来圏が三角圏として圏同値になることをいう。現在では、導来同値を含む導来圏の三角圏としての圏同値は数学の様々な研究分野に現れている。例えば、ベイリンソンによって射影空間の接続層圏の有界導来圏はある多元環の有界導来圏と三角圏として圏同値になる事が示され([1])、ブルエによる、正標数の体上の群環のブロックとブラウアー対応子が導来同値になるというアーベル不足群予想があり([2])、コンセビッチによって数学的に定式化された物理学が起源のホモロジー的ミラー対称性予想はカラビ・ヤウ多様体に対して別のカラビ・ヤウ多様体が存在して、深谷圏の有界導来圏と接続層圏の有界導来圏が三角圏として圏同値となる、というものであった([6])。

これらの例からも分かるように、導来同値は別の分野の研究を結びつける非常に有用な概念である。従って、他分野の研究へ導来圏の三角圏としての圏同値を通して多元環の表現論が応用され得る。その際に、導来圏の三角圏としての圏同値の下で部分三角圏がどのように振る舞うか、導来同値を通してより簡単な多元環を調べる事に帰着出来るか、が分かると良い。二つの環が導来同値になるかどうかを調べるには、導来同値の不変量を求める事が重要となる。様々な不変量が知られているが、ここでは自己移入次元の有限性を取り上げたい。

以下では、環はすべて両側ネター環とする。自己移入次元が有限な環、すなわち岩永・ゴレンシュタイン環のクラスは、様々な分野に現れる環を含んでいるため、この環を研究す

る事は広範に恩恵をもたらす。例えば、量子群や非可換代数幾何などの分野にも現れるアウスランダー・ゴレンシュタイン環は、自己移入多元環の高次元化という側面と、可換ゴレンシュタイン環の非可換化という側面を持った環である。研究代表者の古賀は筑波大学の星野との共同研究により、岩永・ゴレンシュタイン環を加群のゴレンシュタイン次元によって特徴付けた([3])。

ゴレンシュタイン次元は可換環論において極大コーヘン・マコーレー加群のなす圏及びその安定圏の解析に顕著に利用されている。これらの解析はコーヘン・マコーレー環上の表現論における最重要の課題である。例えば吉野によって、孤立特異点上でアウスランダー・ライテン理論が展開出来ることが示され([8])、ゴレンシュタイン孤立特異点上の安定圏がカラビ・ヤウ性を持つことの一般化が伊山・ウェミスによってなされている([4])。ゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏は、可換コーヘン・マコーレー環上では常に極大コーヘン・マコーレー加群のなす圏に含まれるが、可換ゴレンシュタイン環ではそれらは一致する事が知られている。その場合、ブックスバームにより安定圏には三角圏の構造が入ることが知られているが、これはゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏の安定圏には常に三角圏の構造が入るという事実によるものである。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、二つの環の導来同値の下でゴレンシュタイン次元が有限な鎖複体の成す有界導来圏の部分三角圏がどのように振る舞うかを明らかにすることである。自己移入次元の有限性は導来同値の不変量であり、それは加群のゴレンシュタイン次元の有限性により特徴付けられるのであった。従ってゴレンシュタイン次元が有限な鎖複体の成す有界導来圏の部分三角圏が導来同値の下

で良い振る舞いをするということが予想できる。

具体的には、導来同値を与える関手がゴレンシュタイン次元が有限な鎖複体の成す有界導来圏の部分三角圏の間の三角圏としての圏同値を与え、ゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏の安定圏の間の三角圏としての圏同値を与えるだろうという事である。実際、自己移入次元の片側の有限性あるいは導来同値が標準的であるという仮定の下で加藤がこの圏同値を示している([5])。

これらを示した後に、環の有界導来圏から射影対象が十分にあるアーベル圏の導来圏へゴレンシュタイン次元の概念を拡張し、同様な主張の成立を目指す。

### 3. 研究の方法

研究代表者は大学の研究室においてインターネット等を駆使して資料を集め研究を行う。また研究代表者の古賀が筑波大学の星野との間で毎月開催する研究セミナーに、関連する分野の研究者(大学院生を含む)を適宜呼んでセミナーでの講演を依頼するとともに、こちらからも先方の研究セミナーに出向いて講演を行う等、研究打ち合わせを綿密に行い専門的情報及び最新情報の交換を行う。さらに、国内外の研究集会に積極的に参加し、成果発表や情報収集を行い、関連分野の研究者との研究討論を活発に行う。

### 4. 研究成果

射影対象が十分にあるアーベル圏の導来圏へゴレンシュタイン次元の概念を拡張し、ある種の条件を満たす導来同値の下でゴレンシュタイン次元有限な鎖複体の成す部分三角圏が保存される事を示した。これによりゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏の安定圏が保存される事も判明した。導来同値がゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏の安定圏の間の三角圏としての圏同値を与える事は、リッカルドによる自己移入多元環における導来同値が安定同値を導くという事実([7])の一般化になっているため、自己移入多元環で培われた技術を自己移入性の仮定を必要としないより広範な研究に応用する可能性を示唆している。またゴレンシュタイン次元が零の加群の成す圏の安定圏が導来同値の不変量として機能するため、この安定圏を計算する研究に重要性を

もたらす事が予想される。

### 参考文献

- [1] A. A. Beilinson, Coherent sheaves on  $P^n$  and problems in linear algebra. (Russian) *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **12** (1978), no. 3, 68-69.
  - [2] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées (French), *Astérisque* No. 181-182 (1990), 61-92.
  - [3] M. Hoshino and H. Koga, Zaks' lemma for coherent rings, *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), no. 6, 1647-1660.
  - [4] O. Iyama and M. Wemyss, Auslander-Reiten Duality and Maximal Modifications for Non-isolated Singularities, arXiv:1007.1296 [math.AG].
  - [5] Y. Kato, On derived equivalent coherent rings, *Comm. Algebra* **30** (2002), no. 9, 4437-4454.
  - [6] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Zurich, 1994), 120-139, Birkhauser, Basel, 1995.
  - [7] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, *J. Pure Appl. Algebra* **61** (1989), no. 3, 303-317.
  - [8] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii+177 pp.
5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)
- [雑誌論文](計 3 件) 全て査読有り
1. M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga, Clifford extension, *Comm. Algebra* **44** (2016), no. 4, 1695--1703.

2. M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga,  
Construction of Auslander-Gorenstein  
local rings as Frobenius extensions,  
Colloq. Math. (2015), no.1, 1--11.
3. M. Hoshino, N. Kameyama and H. Koga,  
Group-graded and group-bigraded rings,  
J. Algebra Appl. 14 (2015), no. 7,  
17pp.

〔学会発表〕(計 3 件)

1. H. Koga, ``Derived equivalences and  
Gorenstein projective dimension'',  
Derived categories of finite  
dimensional algebras, Shizuoka  
University, Japan, September 11-12,  
2015.
2. M. Hoshino and H. Koga, ``Derived  
equivalences and Gorenstein  
projective dimension'', 第 48 回環論お  
よび表現論シンポジウム、名古屋大学、  
愛知県、名古屋市、2015年9月7～  
10日.
3. M. Hoshino and H. Koga, ``Derived  
equivalences and Gorenstein  
projective dimension'', 第 60 回代数  
学シンポジウム、静岡大学、静岡県、静  
岡市、2015年8月31～9月3日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

古賀 寛尚 (KOGA Hirotaka )  
東京電機大学・情報環境学部・助教  
研究者番号：30736723