様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２８年　６月　９日現在

機関番号：３２６１３
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８８７０３６

研究課題名（和文）複素幾何における標準計量及び測度と標準束の正値性に関する研究

研究課題名（英文）canonical metrics or measures in complex geometry and positivity of canonical bundle

研究代表者
菊田　伸（Kikuta, Shin）

工学院大学・公私立大学の部局等・准教授

研究者番号：４０７３６７９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究において，対数的標準束の正値性が境界において真に退化している準射影代数多様体上で，負のリッチ曲率を持つ完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動を考察した．そして境界が一般型である場合に，境界に接する方向では特異ケーラー・アインシュタイン計量に漸近することを示した．この収束は境界全体ではカレントとして，標準束の豊富集合上では滑らかな意味で従う．また境界がリッチ平坦である場合にも考察し，その典型例である複素双曲多様体のトロイダルコンパクト化に対しては，境界に接する方向では0に滑らかに漸近することを得た．

研究成果の概要（英文）：In this project, we studied a boundary behavior of the complete Kahler-Einstein metric of negative Ricci curvature over quasi-projective manifolds. In particular, a case when positivity of the log-canonical bundle is strictly degenerate on the boundary was mainly discussed. We first proved that when the boundary is of general type, the metric asymptotically approaches to the singular Kahler-Einstein metric in the directions tangent to the boundary. This convergence follows on the whole of the boundary as a current, and on the ample locus of the canonical bundle in the smooth topology. Moreover it was also established that for any troidal compactifications of complex hyperbolic manifolds, the metric asymptotically and smoothly approaches to 0 in the tangent directions.

研究分野：複素幾何学

キーワード：完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動　準射影代数多様体　境界における対数的標準束の正値性の退化　特異ケーラー・アインシュタイン計量　複素双曲多様体のトロイダルコンパクト化　体積増大度

１．研究開始当初の背景

複素幾何学において負曲率性に付随する(複素構造や双有理構造のみに依存する)標準的な計量や測度は，微分幾何のみならず多変数函数論や代数幾何学などとの関連や応用の場面などに自然に現れ，重要な働きをしていることが観察されている．本研究では特に，ケーラー・アインシュタイン計量や測度双曲性を定める測度に対して標準束の正値性の退化との関係を考察した．

(1) 負のリッチ曲率を持つケーラー・アインシュタイン計量は，コンパクトな複素代数多様体上においてはAubinとYauによって，その存在と標準束の豊富性が同値であることが示されている(カラビ予想の解決)．その後非コンパクトな場合，特に準射影代数多様体に，この定理が小林(亮)，辻，Tian・ Yau，板東らによって拡張され，完備なケーラー・アインシュタイン計量の存在が得られた．この場合は，対数的標準束の境界の外でのある正値性の仮定が必要である．ここで得られたような非コンパクトな完備リーマン多様体上では，ラプラシアンのスペクトルなどの幾何学的情報は，計量の無限遠(この場合は境界)での振る舞いに大きく依存している．よって準射影代数多様体の理論の微分幾何や代数幾何への広範で深い応用を発展させるためには，完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動を決定することが不可欠である．
そこでSchumacherは対数的標準束が境界でも退化せずに豊富である場合に その挙動を調べ，境界上のケーラー・アインシュタイン計量に漸近することを得た．更に代表者は，その Schumacher の定理のオービフォールド版にあたる主張も証明した．
しかしながら，これまで考察されているのは，対数的標準束が境界でも退化しない場合のみである．代数幾何的にはこれは非常に制限された状況であり，更に一般的な退化では何が起こるかを決定しなければならないと思われる．

(2) 複素平面内の単位円盤上の正則函数の性質の一つとしてシュワルツの補題がある．これを幾何学的に再解釈すると，ポアンカレ測度に関して単位円盤間の正則写像が体積を減少すると言い換えられる．この測度減少原理を要請することで，小林(昭)は任意の複素多様体上に小林測度やカラテオドリー測度を定義した．そしてこれらの退化度合いが大きくない場合に，それぞれ小林測度双曲的，カラテオドリー測度双曲的と呼ぶ．実際に，コンパクトリーマン面の場合を考えると，この概念と標準束の正値性は同値である．そこで高次元の場合はどう関係しているのかという問題が自然に考えられる．
小林測度双曲性の場合は，小林・落合によって標準束の巨大性よりは弱い性質であることは知られており，その逆は小林予想と呼ばれ，未だ未解決の難問である．一方代表者は，カラテオドリー測度双曲性は様々な状況で標準束の正値性より強いことを，それぞれの性質を測る量の間の普遍的な不等式を作ることで，数値的に導いた．

２．研究の目的

上述の背景の下，次を解決することを目的に研究を行った．

(1) 準射影代数多様体上の負のリッチ曲率を持つ完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動を決定することが最大の目標である．その境界挙動には対数的標準束の正値性の境界における退化が影響していると目論んでおり，それらの間の関係を決定することで目標達成したい．具体的には，Schumacher の非退化の場合の定理や小林(亮)の複素曲面の場合の考察を鑑みると，「境界挙動には境界上の一般化されたケーラー・アインシュタイン計量が現れる」と予想しており，この予想が成立することを示したいと考えている．

(2) 測度双曲性と標準束及び余接束の正値性の間の更なる関係を見つけだすことが目的である．そしてその中で小林予想の解決に繋がるアイデアを導きたいと考えている．
カラテオドリー測度双曲性の場合は，様々な代数幾何的な正値性を測る量とカラテオドリー測度の間の普遍的不等式を作りたい．例えば，ベルグマン核とカラテオドリー測度の間の不等式，余接束の体積とカラテオドリー測度の間の不等式である．前者は代表者の以前の結果の局所化になっており，後者は余接束への拡張になっている．
小林測度双曲性の場合は，小林・落合の定理を中間小平次元の場合に拡張することが目的である．そのためには小林測度双曲的な方向を測る概念が必要であるが，まずその定式化をし，その性質を理解したい．これが実行できたならば，辻の定理の拡張「普遍被覆が同じケーラー多様体の小平次元は同じである」に応用できるのではないかと考えている．

３．研究の方法

上述の目的を達成するため，本プロジェクトに関連する国内・国外研究集会やセミナーに積極的に参加し，微分幾何や複素代数幾何などに関して様々な情報を収集した．更に参考図書を利用してモンジュ・アンペール方程式に対する多重ポテンシャル論的手法に関して理解を深めた．また具体的には次の方法で研究に取り組んだ．

(1) 対数的標準束の正値性が境界において真に退化している場合は，完備ケーラー・アインシュタイン計量はポアンカレ増大

ではない．また完備ケーラー・アインシュタイン計量を求めるための参考計量として有界な曲率を持つものを構成することが単純ではないと思われる．その結果微分幾何の範疇では，考察すべき退化型複素モンジュ・アンペール方程式から直接に解の評価を得ることが困難となる．よってケーラー・アインシュタイン計量をケーラー・リッチ流によって近似することを考えた．この時，ケーラー・リッチ流の各時刻では正値性が非退化な場合に対応するので，Schumacher の議論が有効で，境界上のケーラー・リッチ流に漸近することが分かる．またコンパクトな場合のケーラー・リッチ流は一般化されたケーラー・アインシュタイン計量に収束することが，辻, Song・Tian, Tosatti・Weinkove・Yang によって得られている．他方で，近年発展が著しい退化型複素モンジュ・アンペール方程式に対する多重ポテンシャル論的手法(Kolodziej, Guedj, Zeriahi などによる)を用いて，解の評価を方程式の解析から直接得ることも考えた．

また，境界において対数的標準束が自明である，即ち境界がリッチ平坦である場合の予想について，非コンパクト複素球商のトロイダルコンパクト化などの具体的な例を考察し，一般の場合の証明のアイデアを得ようとした．

(2) 測度双曲多様体の標準束の正値性を導くには，標準測度から定まる特異エルミート計量の正値性を解析する必要がある．実際にカラテオドリー測度の場合に代表者によって詳しく調べられ，その応用としてコーシー・リーマン作用素の解の評価によりベルグマン核との関係が得られていた．更に詳しくベルグマン核との普遍的な不等式を得るために，カラテオドリー測度の対数を重荷としてコーシー・リーマン作用素の解の評価を定量的に適用することを考えた．

次にカラテオドリー測度双曲多様体の余接束の巨大性を導くために，カラテオドリー計量の正則双断面曲率を解析した．実際に，Klingler らによってケーラー計量に対しては類似の性質が得られているので，それを参考にした．ただしカラテオドリー計量は特異複素フィンスラー計量であるため通常の意味での正則双断面曲率は存在しない．故にそのようなクラスの計量に対して P. M. Wong によって導入された正則双断面曲率カレントで代用した．

また小林測度双曲的な方向を測る標準測度とその次元を構成するため，小平次元との類似性を考慮に入れ，飯高ファイブレーションの構成法を参考にした．

４．研究成果

本研究目的を達成するため，上述の方法で研究に取り組み，次の成果を得た．

(1) これまでの代表者の考察により，準射影代数多様体上の負のリッチ曲率を持つ完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動について予想を立てることができた．それは境界上での対数的標準束の正値性の退化を表す一般化されたケーラー・アインシュタイン計量に漸近するという予想である．本プロジェクト期間において，この予想を境界が一般型である場合に解決することができた．即ち主張を正確に述べると，完備ケーラー・アインシュタイン計量は境界に接する方向では特異ケーラー・アインシュタイン計量に漸近するということである．実際にここで得られた漸近の仕方は，特異性のある部分(非豊富集合)の外では滑らかな収束で，全体としてはカレントとしての収束である．この定理は，ケーラー・アインシュタイン計量を内部と境界上の両方でケーラー・リッチ流により近似することで証明した．その際に，境界に近づけてもその近似が悪くならないことを確認する必要がある．その問題を，境界が一般型であることを応用し，所謂「辻のトリック」を用いて克服した．現在は多重ポテンシャル論を駆使して直接モンジュ・アンペール方程式を解析し，近似せずにこの成果を導くことを試みている．これが成功すれば，さらに一般の予想の証明にも役立つと目論んでいる．

また境界がリッチ平坦の場合も予想の解決に取り組んだ．一般的な状況では，体積増大度を決定することができなかったのが原因で，解くことはできなかった．よってそれが今後の課題である．しかし，複素二次元の場合や，複素双曲多様体のトロイダルコンパクト化に対しては，それぞれ小林(亮)と N. Mok による考察を元にして，証明を与えることができた．

以上の成果たちは次の論文にまとめ投稿した．

Boundary behavior of Kähler-Einstein metric of negative Ricci curvature over quasi-projective manifolds with boundary of general type (投稿中)

この研究内容については，様々な国際会議，国内の学会やセミナーにおいて講演した．

(2) 様々な考察を行ったが，測度双曲多様体上の標準束及び余接束の正値性に関する具体的な成果は上げることができなかった．しかし(1)においてリッチ曲率が負の多様体に対しての性質を得ており，測度双曲多様体もそのクラスに近いと考えられている．故に(1)の成果およびその中での考察は，測度双曲多様体の研究の発展へも今後繋がると信じている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

Shin Kikuta, The limits on boundary of orbifold Kähler-Einstein metrics and Kähler-Ricci flows over quasi-projective manifolds, Mathematische Annalen, **361** (2015), no. 1-2, 477-510, 査読有.

〔学会発表〕（計９件）

① 菊田 伸, 対数的標準束の正値性の退化と完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動, 複素解析幾何セミナー, 2016年6月6日, 東京大学数理科学研究科.
② 菊田 伸, 一般型境界を持つ準射影代数多様体上における完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動, 幾何学セミナー, 2016年5月13日, 首都大学東京.
③ 菊田 伸, 一般型境界を持つ準射影代数多様体上のリッチ曲率が負のケーラー・アインシュタイン計量に対する境界挙動, 複素解析幾何学のポテンシャル論的諸相 (Potential Theoretic Aspects of Complex Analytic Geometry), 2016年2月12日, 東京大学数理科学研究科.
④ 菊田 伸, 一般型境界を持つ準射影代数多様体上のリッチ曲率が負のケーラー・アインシュタイン計量に対する境界挙動, 微分幾何・トポロジーセミナー, 2015年11月16日, 慶応大学.
⑤ Shin Kikuta, Boundary asymptotics of Kähler-Einstein metrics of negative Ricci curvature on quasi-projective manifolds, The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Application, 2015年8月25日, 九州産業大学.
⑥ 菊田 伸, 準射影代数多様体上の負のリッチ曲率を持ったケーラー・アインシュタイン計量の境界漸近, ホッジ理論と代数幾何学, 2015年8月7日, 東京電機大学.
⑦ 菊田 伸, 準射影代数多様体上の負のリッチ曲率を持ったケーラー・アインシュタイン計量の境界漸近, 第61回幾何学シンポジウム, 2014年8月24日, 名城大学.
⑧ Shin Kikuta, Boundary asymptotics of Kähler-Einstein metrics of negative Ricci curvature on quasi-projective manifolds, Young Mathematician Workshop on Several Complex Variables, 2014年8月5日, POSTECH, Korea.
⑨ Shin Kikuta, Positivity of canonical or cotangent bundle over Carathéodory measure hyperbolic manifolds, The 4th South Kyushu workshop on algebra - Complex Ball Quotients and Related Topics -, 2014年7月23日, Kumamoto University.

６．研究組織
(1)研究代表者

菊田 伸（KIKUTA, Shin）
工学院大学・教育推進機構・准教授
研究者番号：40736790