

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：32660

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2014～2015

課題番号：26887037

研究課題名(和文)リーマン多様体上の最適化アルゴリズムの発展およびその諸分野における問題への応用

研究課題名(英文)Development of Riemannian optimization algorithms and their applications

研究代表者

佐藤 寛之 (SATO, Hiroyuki)

東京理科大学・工学部・助教

研究者番号：80734433

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：ユークリッド空間における制約つき最適化問題の実行可能領域がリーマン多様体をなす場合には、その問題をリーマン多様体上の無制約最適化問題と見なすことができる。本研究では、大規模な最適化問題に対する有効な手法として知られている非線形共役勾配法のうち、ユークリッド空間において比較的弱い条件下で大域的収束性が証明されている Dai-Yuan 型の方法をリーマン多様体上に拡張することで、リーマン多様体上の新たな最適化アルゴリズムを提案した。また、リーマン多様体上の信頼領域法に基づいて、複数の長方形列の同時特異値分解アルゴリズムを提案した。

研究成果の概要(英文)：Constrained optimization problems whose feasible sets are Riemannian manifolds can be regarded as unconstrained problems on the manifolds. Among nonlinear conjugate gradient methods on the Euclidean space, which are known as effective methods for large-scale problems, the Dai-Yuan-type method is guaranteed to have global convergence property under a mild assumption. This research generalized the Dai-Yuan-type method to that on Riemannian manifolds, which led to a novel Riemannian optimization algorithm. This research also proposed a new joint singular value decomposition algorithm based on the Riemannian trust-region method.

研究分野：最適化

キーワード：最適化 アルゴリズム 応用数学 数理工学 幾何学

1. 研究開始当初の背景

最適化問題とは、目的関数と呼ばれる与えられた実数値関数を最小化する問題である。従来、連続最適化問題はユークリッド空間において定義された連続関数を最小化する問題として定式化され、様々な解法アルゴリズムが研究されてきた。特に無制約最適化問題に対しては、最急降下法や共役勾配法、ニュートン法などのアルゴリズムが知られており、それらの収束性などの性質が詳しく研究されている。ところがこれらの方法は、勾配やヘシアンなど目的関数に関する量のみに基づいて計算を行うため、制約条件付きの最適化問題にはそのままでは適用することができない。

制約付き最適化問題に特化した解法アルゴリズムも研究されているが、無制約最適化問題に対する手法のように一般の問題に対して収束性を議論することは難しい。また、そうした手法では、制約条件を満たす点全体がなす探索領域の次元が小さい問題であっても、外側のより大きな次元のユークリッド空間で計算をすることになるため、計算量の観点からも無駄が生じ得る。

そこで近年研究が発展してきた分野がリーマン多様体上の最適化である。これは、ユークリッド空間における制約付き問題において、制約条件を満たす点全体がリーマン多様体をなしている場合には、その問題をその多様体上の無制約最適化問題と見なして最適化アルゴリズムを議論するというものである。

また、多様体上の最適化問題は様々な応用例をもつ。たとえばシュティーフエル多様体上の最適化問題は行列の特異値分解と密接な関係をもち、グラスマン多様体上の最適化問題は行列の固有空間問題などへの応用をもつ。

このように応用問題を見据えて様々なリーマン多様体上の最適化問題に対して解法アルゴリズムを提案する研究だけでなく、ユークリッド空間における既存の無制約最適化手法をリーマン多様体上に拡張することも重要である。その中でも、ヘシアンを計算する必要がなく、かつ速い収束性をもつ重要な最適化手法である共役勾配法についてはリーマン多様体上への拡張がまだ十分に行われておらず、発展の余地が多分にある。

2. 研究の目的

(1) 共役勾配法のリーマン多様体上への拡張

ユークリッド空間上の共役勾配法を拡張してリーマン多様体上の最適化理論を発展させることを第一の目的とする。ユークリッド空間においては、Fletcher-Reeves 型の共役勾配法の改良版として、より弱い条件の下で大域的収束性が保証される、Dai-Yuan 型の共役勾配法が提案されている。そこで、Dai-Yuan 型の共役勾配法を多様体上に拡張し、大域的収束性を証明する。

(2) リーマン多様体上の最適化手法の応用

報告者はシュティーフエル多様体上の任意の最適化問題に対するニュートン法において、ニュートン方程式を次元の無駄なく解く方法を申請時点で考案しており、特異値分解に関する最適化問題に対するより効率的なニュートン法を提案することを目的とする。また、複数の行列の同時特異値分解問題も2つのシュティーフエル多様体の積多様体上の最適化問題であり、この問題に対しても幾何学的なアプローチにより解法アルゴリズムを提案する。

3. 研究の方法

(1) 共役勾配法のリーマン多様体上への拡張

共役勾配法では β というパラメータが存在し、この β をどう計算するかが収束性に影響する。 β の選び方は特に、各反復において探索方向にどれだけ進んだところを次の点にするかを表すステップ幅に課すべき条件に関係しており、ユークリッド空間においては、Fletcher-Reeves 型の β を用いるとステップサイズは強ウルフ条件と呼ばれるものを満たすように計算しなければならないが、Dai-Yuan 型の β を用いるとより弱い条件であるウルフ条件を満たささえすれば大域的収束性が保証される。この Dai-Yuan 型の共役勾配法を scaled vector transport と呼ばれる報告者らが提案した幾何学的道具を用いて多様体上に拡張する。

(2) リーマン多様体上の最適化手法の応用

報告者は行列の特異値分解をシュティーフエル多様体上の最適化問題として扱っていた。そこではニュートン方程式をそのまま解くのが困難だとして、最大特異値のみを求める部分問題に分割し、特異値を順次計算してゆくアルゴリズムを提案したが、クロネッカー積などを使う方法を応用すれば、特異値分解問題に対するニュートン方程式をもそのまま解くことができると期待される。

4. 研究成果

(1) 共役勾配法のリーマン多様体上への拡張

Dai-Yuan 型の共役勾配法をリーマン多様体上に拡張し、ウルフ条件を満たすステップ幅を用いたときの提案手法の大域的収束性の証明を行った。また、数値実験により提案手法と Fletcher-Reeves 型の共役勾配法を比較し、提案手法の方が有効であることを検証した。新しいパラメータ β の提案にあたっては、ユークリッド空間における Dai-Yuan 型の手法に現れる β の同値な別の表現から出発し、これを反復解法において用いることができるよう工夫した。また、提案手法においては scaled vector transport を用いたが、この際のスケールリング部分を β に吸収させることもでき、その場合は scaled vector transport を用いない従来のアルゴリズムの

クラスを含めて議論することも可能である。これらの結果を論文にまとめ、発表した（引用文献①）。

(2) リーマン多様体上の最適化手法の応用

複数の長方形行列の同時特異値分解問題を、2つのシュティーフエル多様体の積多様体上の最適化問題として定式化し、その幾何学を調べることで、信頼領域法を導出した。この結果を論文にまとめ（引用文献②）、学会や研究会でも発表した。

また、特異値分解に対応するリーマン多様体上の最適化問題に対するニュートン法の効率的な解法を提案した。そのために、目的関数のヘシアンの変形行列をクロネッカー積を用いて導出し、ニュートン法において現れるニュートン方程式を線形方程式の標準形に変換した。さらに行列ベクトル積の演算に注目することで、実際の数値計算においてはヘシアンの変形行列を具体的に計算する必要のないクリロフ部分空間法に基づくアルゴリズムを提案した。また、ニュートン方程式を厳密に解かない場合のアルゴリズムの局所的な2次収束性についても議論した。これらの結果を複数の学会や研究会で発表し、成果をまとめた論文を現在準備中である。

<引用文献>

- ① Hiroiyuki Sato, A Dai-Yuan-type Riemannian conjugate gradient method with the weak Wolfe conditions, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 64, No. 1, 2016, 101-118.
- ② Hiroiyuki Sato, Joint singular value decomposition algorithm based on the Riemannian trust-region method, *JSIAM Letters*, Vol. 7, 2015, 13-16.

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計7件）

- ① Hiroiyuki Sato, A Dai-Yuan-type Riemannian conjugate gradient method with the weak Wolfe conditions, *Computational Optimization and Applications*, 査読有, Vol. 64, No. 1, 2016, 101-118
DOI: 10.1007/s10589-015-9801-1
- ② 佐藤寛之, 相原研輔, シュティーフエル多様体上のニュートン法とその収束性解析, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1981巻, 2016, 127-142,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1981-12.pdf>

- ③ Hiroiyuki Sato and Kazuhiro Sato, Riemannian trust-region methods for H^2 optimal model reduction, *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, 査読有, 2015, 4648-4655
DOI: 10.1109/CDC.2015.7402944
- ④ Akiko Kitao, Takayuki Shiohama, and Hiroiyuki Sato, Financial news classification based on topographic independent component analysis: Optimization on the Stiefel manifold, *Proceedings of the 16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference*, 査読無, 2015, 403-415,
http://www.asmda.es/images/1_H-KO_ASMDA2015_Proceedings.pdf
- ⑤ 佐藤寛之, シュティーフエル多様体上の信頼領域法の近似的同時特異値分解への応用, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1931巻, 2015, 161-168
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1931-13.pdf>
- ⑥ Hiroiyuki Sato, Joint singular value decomposition algorithm based on the Riemannian trust-region method, *JSIAM Letters*, 査読有, Vol. 7, 2015, 13-16
DOI: 10.14495/jsiaml.7.13
- ⑦ Hiroiyuki Sato, Riemannian conjugate gradient method for complex singular value decomposition problem, *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 査読有, 2014, 5849-5854
DOI: 10.1109/CDC.2014.7040305

〔学会発表〕（計16件）

- ① 松永和也, 佐藤寛之, リーマン多様体上の種々の共役勾配法のパフォーマンスプロファイルによる比較, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2016年春季研究発表会, 2016年3月17日, 慶應義塾大学（神奈川県横浜市）
- ② 佐藤寛之, 相原研輔, シュティーフエル多様体上のニュートン法に基づく近接特異値をもつ行列に対する特異値分解アルゴリズム, 日本応用数学会2016年研究部会連合発表会, 2016年3月5日, 神戸学院大学（兵庫県神戸市）
- ③ 相原研輔, 佐藤寛之, シュティーフエル

多様体上のニュートン法に対する線形反復解法の応用, 2015 年度応用数学合同研究集会, 2015 年 12 月 19 日, 龍谷大学 (滋賀県大津市)

- ④ Hiroiyuki Sato and Kazuhiro Sato, Riemannian trust-region methods for H^2 optimal model reduction, The 54th IEEE Conference on Decision and Control, 2015 年 12 月 17 日, 大阪府立国際会議場 (大阪府大阪市)
- ⑤ Kensuke Aihara and Hiroiyuki Sato, Matrix-free Krylov subspace methods for solving a Riemannian Newton equation, 2015 SIAM Conference on Applied Linear Algebra, 2015 年 10 月 30 日, アトランタ (アメリカ合衆国)
- ⑥ 佐藤寛之, 相原研輔, シュテューフェル多様体上のニュートン法の数値的な収束性について, 日本応用数理学会 2015 年度年会, 2015 年 9 月 11 日, 金沢大学 (石川県金沢市)
- ⑦ 佐藤寛之, 相原研輔, シュテューフェル多様体上のニュートン法とその収束性解析, 京都大学数理解析研究所研究集会「新時代を担う最適化: モデル化手法と数値計算」, 2015 年 9 月 1 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)
- ⑧ Hiroiyuki Sato and Kensuke Aihara, Riemannian Newton's method for optimization problem on the Stiefel manifold, 22nd International Symposium on Mathematical Programming, 2015 年 7 月 13 日, ピッツバーグ (アメリカ合衆国)
- ⑨ Akiko Kitao, Takayuki Shiohama, and Hiroiyuki Sato, Financial news classification based on topographic independent component analysis: Optimization on the Stiefel manifold, 16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference, 2015 年 7 月 2 日, プレウス (ギリシャ)
- ⑩ 相原研輔, 佐藤寛之, リーマン多様体上のニュートン方程式に対するクリロフ部分空間法 (Solving a Riemannian Newton equation with matrix-free Krylov subspace methods), 第 44 回数値解析シンポジウム, 2015 年 6 月 10 日, ぶどうの丘 (山梨県甲州市)
- ⑪ Hiroiyuki Sato, Riemannian optimization and its applications,

Hong Kong-Tokyo Workshop on Scientific Computing, 2015 年 4 月 6 日, 国立情報学研究所 (東京都千代田区)

- ⑫ 佐藤寛之, 相原研輔, 多様体上のある最適化問題に対するニュートン法について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 年春季研究発表会, 2015 年 3 月 27 日, 東京理科大学 (東京都新宿区)
- ⑬ 相原研輔, 佐藤寛之, 直交制約付き最適化問題に対するニュートン方程式の求解について, 第 11 回日本応用数理学会研究部会連合発表会, 2015 年 3 月 6 日, 明治大学 (東京都中野区)
- ⑭ Hiroiyuki Sato, Riemannian conjugate gradient method for complex singular value decomposition problem, The 53rd IEEE Conference on Decision and Control, 2014 年 12 月 17 日, ロサンゼルス (アメリカ合衆国)
- ⑮ 佐藤寛之, シュテューフェル多様体上の信頼領域法の近似的同時特異値分解への応用, 京都大学数理解析研究所研究集会「最適化アルゴリズムの進展: 理論・応用・実装」, 2014 年 9 月 25 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)
- ⑯ 佐藤寛之, 幾何学的最適化に基づく近似的同時特異値分解アルゴリズム, 日本応用数理学会 2014 年度年会, 2014 年 9 月 5 日, 政策研究大学院大学 (東京都港区)

[その他]

- ① 解説記事:
佐藤寛之, 曲がった空間での最適化, オペレーションズ・リサーチ, 60 巻, 2015, 549-554.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 寛之 (SATO, Hiroiyuki)

東京理科大学・工学部・助教

研究者番号: 80734433