2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１７６０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８８７０４１
研究課題名（和文）Poisson積分の最大点と体の形状

研究課題名（英文）Maximizers of Poisson's integral and the shape of a body

研究代表者
坂田　繁洋（Sakata, Shigehiro）

宮崎大学・教育文化学部・講師

研究者番号：３０７３２９３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：ユークリッド空間内の体(有界な開集合の閉包)に対して、その距離核ポテンシャルの最大点によって中心が定義される。距離核ポテンシャルの最大点の意味での体の中心の位置と個数(一意性)を考察した。ポテンシャルとして、具体的に、上半空間におけるPoisson積分やRieszポテンシャルを考える際、最大点はパラメータに依存するが、最大点がパラメータに関して不変であるための必要十分条件を与えた。上半空間におけるPoisson積分から定まる凸体の中心は一意に定まることを示した。Rieszポテンシャルから定まる体の中心が一意に定まるための十分条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：For a body (the closure of a bounded open set) in Euclidean space, we investigated a maximizer of the potential obtained as the convolution of a radially symmetric function and the characteristic function of the body. It is known that a maximizer of the potential defines a center of the body. The location and number of centers were studied. Concretely, centers defined by Poisson's integral or by the Riesz potential were studied. In general, such centers depend on parameters. A necessary and sufficient condition for the existence of a stationary center was given. It was shown that every convex body has a unique center defined by Poisson's integral. A sufficient condition for the uniqueness of a center defined by the Riesz potential was given.

研究分野：凸幾何学

キーワード：中心　体　Poisson積分　Rieszポテンシャル

1．研究開始当初の背景

2003 年の生徒の学習到達度調査で提示された街灯問題「三角形の公園に街灯を 1 本立てる。どこに立てればよいか？」が本研究課題の出発点である。柴田勝征氏(福岡大学)は，街灯問題に対して，「高さ h の街灯を位置 x においたときに三角形の公園の明るさを定義し，明るさが最大になる点に街灯をおけばよい」と回答した。柴田氏は Kepler の逆 2 乗則を仮定し，空間内の点(x,h)に光源があるとき，平面内の公園が受ける明るさを x の関数の形で定義し，その最大点を高さ h の(立体)灯心と呼んだ。

柴田氏の考察は三角形の定義関数を境界値とする 3 次元ユークリッド空間の上半空間における Poisson 積分を，第 3 変数を固定して，2 変数関数と見たときの最大点の研究といえる。柴田氏の考察の一般化として，体 K(有界な開集合の閉包)の定義関数を境界値とする m+1 次元ユークリッド空間の上半空間における Poisson 積分を，第 m+1 変数を固定して，m 変数関数と見たときの最大点の研究が考えられる。第 m+1 変数を h とおくとき，m 変数関数としての Poisson 積分の最大点を体 K の高さ h の(立体)灯心とよぶ。

Poisson 積分の連続性と体 K のコンパクト性から灯心の存在は容易にわかる。また，すべての灯心は K の凸包に含まれることも容易にわかる。

灯心の一意性は体 K の形状や高さ h によっては成り立たないことが知られている。例えば，K が同じ大きさの球 2 つの非交和で h が K の直径に比べ十分小さいとき，灯心は 2 個存在する。灯心が一意に定まるための h の十分条件は「h が K の直径と比べて十分大きければよい」として得られていたが，体 K の十分条件は得られていなかった。すなわち，灯心の一意性に関して研究の余地があった。具体的には「K が凸ならば，任意の h に対して，灯心は一意に定まるか？」という予想は未解決であった。

逆問題の視点から，灯心の位置から体 K の形状を特徴付けることにも研究の余地があった。同じ大きさの球 2 つの非交和を考えると，灯心は，一般に，高さに関して動くことがわかる。このことから「高さに関して動かない灯心を持つ体 K は何か(どのような性質をみたすか)？」という問題が考えられる。例えば，「高さに関して動かない灯心を持つ三角形は正三角形に限るか？」や「高さに関して動かない灯心を持つ凸四角形は平行四辺形に限るか？」という問題が考えられる。

高さに関して動かない灯心の存在による体の形状の特徴づけの問題意識は Rolando Magnanini 氏(Firenze 大学)と坂口茂氏(東北大学)の研究に由来する。Magnanini 氏と坂口氏は熱方程式の解が時刻に関して動かない空間臨界点を持つための必要十分条件を導き，それを用いて，時刻に関して動かない熱方程式の解の空間最大点(ホットスポット)が存在する凸体の形状を特徴づけた。両氏が導入した必要十分条件はバランス法則と呼ばれる。

2．研究の目的

灯心の一意性および体の特徴づけの研究として以下の問題の解決が本課題の目的であった：

(1) 体 K が凸ならば，任意の高さ h に対して，灯心は一意に定まるか？

(2) 第 m+1 変数 h を固定して，m 変数関数と見た Poisson 積分が h に関して動かない臨界点を持つための必要十分条件を与えよ。より詳しく，それは Magnanini 氏と坂口氏が導入したバランス法則か？

(3) 灯心が高さ h に関して動かないような体 K はどのようなものか？例えば，
・平面内の三角形で，その灯心が高さ h に関して動かないならば，その三角形は正三角形に限る。
・平面内の凸四角形で，その灯心が高さ h に関して動かないならば，その凸四角形は平行四辺形に限る。
という主張は成り立つか？

3．研究の方法

(1) 灯心の一意性を示すために，m 変数関数としての Poisson 積分の凸性を導くことを試みた。Maple による具体例検証により，m 変数関数としての Poisson 積分は，たとえ K が凸であったとしても，(K の直径と比べて)十分小さい h に対して，K で変曲点をもつことがわかった。すなわち，m 変数関数としての Poisson 積分は K で上に凸ではない。そこで，変曲点をもつが臨界点が 1 個となるような広い意味での関数の凸性を考察する必要があった。この候補として関数のべき凸性が挙げられる。

正値関数 f が p-凸であるとは，f の p 乗が上に凸($p>0$), log f が上に凸($p=0$), f の p 乗が下に凸($p<0$)として定義される。例えば，正規分布の確率密度関数は狭義 0-凸であり，変曲点を持つが，臨界点は唯一である。一般に，2 階連続微分可能な正値関数の狭義 p-凸性が示されれば，臨界点の個数が 1 個以下であることが知られている。

畳み込みの形で表わされる正値関数のべき凸性を導く際， Brascamp and Lieb の定理が強力な道具として知られる。そこで，本研究にも Brascamp and Lieb の定理の適用を試みた。その際に，大きな障害となったのは Brascamp and Lieb の定理からは関数の「狭義」べき凸性が(直接には)導かれないことであった。そのため，Brascamp and Lieb の定理の本研究への修正が必要であっ

たが，代表者のその時点の能力では不可能であった。

Brascamp and Lieb の定理の改良を遂行すべく，関数のべき凸性に詳しい Firenze 大学の Paolo Salani 氏に Brascamp and Lieb の定理周辺の事柄についてご指導をいただいた。具体的には, Brascamp and Lieb の論文の詳細な解説，Brunn-Minkowski の不等式に関する Gardner の論文の一部の紹介をしていただいた。

Salani 氏とのコミュニケーションを通して得られた情報および深まった理解を本研究の場合に適用・修正することを行った。

(2) 第 m+1 変数 h を固定して，m 変数関数としての Poisson 積分が h に関して動かない臨界点を持つための必要十分条件の候補として Magnanini 氏と坂口氏のバランス法則が挙がっていたので，Magnanini 氏と坂口氏のバランス法則を導入した論文を勉強した。その勉強した手法を本研究の場合に修正することを行った。

Magnanini 氏と坂口氏がバランス法則を導いた手法は熱方程式の解の空間微分を Laplace 変換の形で表わし，Laplace 変換の単射性を用いて，条件式を取り出すことであった。そこで，Poisson 積分の微分を単射性を備えた積分変換の形で表わすことを試みた。

(3) 高さ h に関して動かない灯心を持つ体を特徴づけるために，時刻に関して動かない熱方程式の解の空間最大点を持つ体の特徴づけを行った Magnanini 氏と坂口氏の論文を勉強した。また，その論文には，その時点で代表者では理解できなかった内容が含まれていたため，Firenze 大学へ行き，Magnanini 氏にご指導いただいた。また，論文に記載されていない有益な情報をいただいた。

Magnanini 氏とのコミュニケーションを通して得た情報および深まった理解により，研究課題の解決を試みた。

4．研究成果

(1) 体 K が凸ならば，任意の第 m+1 変数 h に対して，m 変数関数としての Poisson 積分の逆数が下に狭義凸(m 変数関数としての Poisson 積分は狭義-1-凸)であることを示した。これにより，凸体 K は高さ h に依らず唯一の灯心を持つことを示した。また，凸体の灯心の軌跡は h に関して滑らかであることも示した。

Poisson 積分に限らず，m 変数関数と凸体の定義関数の畳み込みとして得られる関数のべき乗が上に狭義凸となるための(一般的な)十分条件も得た。

(2) m 変数関数としての Poisson 積分の臨界点が第 m+1 変数 h に関して動かないための必要十分条件は体 K が Magnanini 氏と坂口茂氏(東北大学)が導入したバランス法則をみたすことであることを示した。(Poisson 積分の微分を Laplace 変換 2 回の合成で表わすことができ，Laplace 変換の単射性から，バランス法則を取り出した。)

(1)の結果と合わせて，凸体 K の灯心が高さ h に関して動かないための必要十分条件は K がバランス法則をみたすことであると結論付けた。

簡単な幾何的議論により，体 K がバランス法則をみたすこと, K の外部がバランス法則をみたすことが同値であることを示した。

次数 s の Riesz ポテンシャル(距離の s 乗と体 K の定義関数の畳み込み)の臨界点が s に関して動かないための必要十分条件もバランス法則であることを示した。(これは Riesz ポテンシャルの微分を両側 Laplace 変換で表わし，両側 Laplace 変換の単射性を用いてバランス法則を取り出すことで示された。)

(3) (2)の結果から高さ h に関して動かない灯心を持つ三角形と凸四角形は，それぞれ，正三角形と平行四辺形に限ることを示した。

s に関して動かない Riesz ポテンシャルの最大点を持つ三角形と凸四角形は, それぞれ，正三角形と凸四角形に限ることを示した。

よりシンプルに，熱方程式の解の時刻に関して動かない空間臨界点の存在, m 変数関数としての Poisson 積分の h に関して動かない臨界点の存在，s に関して動かない Riesz ポテンシャルの臨界点の存在はすべて同値で, K のバランス法則によってつながることを示した。

(4) (2)で Riesz ポテンシャルの動かない臨界点を研究した際，Riesz ポテンシャルの微分可能性についても詳しく考察した。それにより，2008 年に Irmina Herburt 氏が示した結果「滑らかな凸体 K の次数 1-**m** の Riesz ポテンシャルの最大点は K の内部に含まれる」を改良することに成功した。

具体的には「内部および外部錐を持つ体 K の境界点において，次数 s (-m<s <=-m+1) の Riesz ポテンシャルの外側方向への微分は負の無限大に発散する」ことを示した。これにより，「凸体 K の次数 s(s>-m)の Riesz ポテンシャルの最大点は K の内部に含まれる」ことが従い，Herburt 氏の結果の凸体の滑らかさと Riesz ポテンシャルの次数の部分が改良された。

(1)の結果は首都大学東京幾何学セミナー，第 62 回幾何学シンポジウム，日本数学会,

RIMS 研究集会などで講演した。

(1)から(3)の結果を以下の形でまとめ，投稿中である：
S. Sakata, Stationary radial centers and characterization of convex polyhedrons, arXiv: 1603.08324.

上記に加えて，ポテンシャルの最大点関連の研究として以下を行った：

(5) 体 K の Riesz ポテンシャルの最大点は radial center と呼ばれ，凸幾何学で一つの研究対象である。radial center は体 K の形状や次数 s によって，一般には，唯一とは限らない。s が m+1 以上ならば，任意の体 K は唯一の radial center をもつこと，s が 1 以下で K が凸ならば，K は唯一の radial center を持つことが 2012 年に今井淳氏(首都大学東京)によって示されている。1<s<m+1 の次数 s に対しては radial center が一意に定まるための十分条件が得られていない。
m-1 乗が上に凸である区分的に 1 階連続微分可能な関数の回転体は，任意の 1<s<m+1 に対して，唯一の radial center を持つことを示した。2 次元の場合には，「凸線対称な体は，1<s<3 をみたす任意の s に対して，次数 s の radial center をただ 1 つもつ」となる。

(6) 高さ無限大の灯心は K の重心であることが知られているが，高さ 0 の灯心は知られていなかった。
体 K が一様外部錐条件をみたすとき，任意の 0 に収束する数列 h(n)に対して，高さ h(n)の灯心の極限点は次数-m-1 の radial center であることを示した。
それを示す過程で，一様外部錐条件をみたす体 K の非正次数の Riesz ポテンシャルの最大点が K の境界からどれだけ離れているかの評価も与え，radial center および(低い高さの)灯心の位置の研究にも進展を与えた。
この結果を使うと，2 次元で K が凸体の場合に，「K の次数-3 の radial center は K の境界から K の内接円の 0.3 倍だけ離れている」という評価が得られる。この評価は，特に，K が鈍角三角形の場合に活きる。

(5)の結果は日本数学会で発表した。(4)および(5)の結果を，それぞれ，以下の形で論文にし，投稿中である：
S. Sakata, Experimental investigation on the uniqueness of a center of a body, arXiv: 1603.02926.
S. Sakata, Geometric estimation of a potential and cone conditions of a body, arXiv: 1603. 02937.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 7 件）
① 坂田繁洋，立体灯心の久遠の旅路，2016 年 2 月 16 日，MZ セミナー，宮崎大学(宮崎県・宮崎市)
② S. Sakata, The locus of illuminating centers, Shapes and other properties of solutions of PDEs, 2015 年 11 月 12 日，京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
③ 坂田繁洋，上半空間における Poisson 積分の凸性，2015 年 9 月 15 日，日本数学会，京都産業大学(京都府・京都市)
④ 坂田繁洋，凸体の立体灯心の一意性，2015 年 8 月 28 日，第 62 回幾何学シンポジウム，東京理科大学(東京都・新宿区)
⑤ 坂田繁洋，Every convex body has a unique illuminating center，2015 年 7 月 31 日，首都大学東京幾何学セミナー，首都大学東京(東京都・八王子市)
⑥ 坂田繁洋，PISA の街灯問題から発展する数学，数学と諸科学の融合 2015，2015 年 7 月 21 日，早稲田大学(東京都・新宿区)
⑦ 坂田繁洋，外部錐条件をみたす体の中心の存在範囲，2015 年 3 月 23 日，日本数学会，明治大学(東京都・千代田区)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
http://tmubdell.math.se.tmu.ac.jp/sakata/
https://sites.google.com/site/shigehirosakata/home

６．研究組織
(1)研究代表者
坂田　繁洋（SAKATA SHIGEHIRO）
宮崎大学・教育文化学部・講師
研究者番号：30732937

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：