様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：新学術領域研究（研究領域提案型）
研究期間：2012～2016
課題番号：２４１０６００２

研究課題名（和文）数理論理学からの計算限界解析

研究課題名（英文）Exploring the limits of computation from mathematical logic

研究代表者
牧野　和久（Makino, Kazuhisa）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：６０２９４１６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　71,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，数理論理学からの計算限界解析を行い，様々な成果を得た．具体的には，例えば，領域計算量に関して決定性と非決定いう計算モデルに能力の差を示す：任意のk=o(log n)に対して、NC[k]≠AC[k]を得た．また，単量論理回路における非多項式下界をさらなる改善を示した． さらに，重み付きの線形マトロイドパリティ問題は離散最適化分野の基礎をなす重要な問題である。この問題に対して初めての多項式時間アルゴリズムを与えた．

研究成果の概要（英文）：In this project, we explore the limits of computation from mathematical logic.We obtain several results. Here we describe three instances. We show that the difference between deterministic and nondeterministic space complexity. Namely, we prove that for any k=o(log n), NC[k] is not equal to AC[k]. We also improve the nonpolynomial lower bound for monotone circuit complexity. We study weighted linear matroid parity problem which is one of the basic combinatorial optimization problems. We provide a polynomial time algorithm for the problem.

研究分野：theory of computation

キーワード：computation

１．研究開始当初の背景

「計算」すなわち，コンピュータ上で実現される処理は，今や人類にとって欠かせないものである．人びとが使うスマホ自体もコンピュータだが，そのスマホでのサービスを支えるのは，様々な情報をデータとして提供する計算である．ビッグデータを駆使する計算は，科学技術，産業，社会基盤など様々 な分野で今や必須となってきている。

こうした現象が 生まれ背景には計算の汎用性ある。こでいう計算とは，デジタルデータに対する，単純な演算や判断の繰り返しの組合せで構成される処理のことでる．このような単純操作組合せだけで，すべての計算を実現することができることを示したのが，チューリングである．この研究はコンピュータ出現に大きな影響を与えたと言われているが，彼のそもそもの動機は人の思考を機械的に表わるときに必要な要素を突き詰めることだったとも言われている．そのチューリング目論見が正しいとすれば，およそ人が客観的に議論できるような物（もの）や事（こと）は原理的にはすべて，この単純な操作の組合せで表わすことがきる．そのような汎用性を計算は持っている．だからこそ，人が理解し，分析してきた物や事が，コンピュータ上でも実現できるのである．

この計算であるが，コンピュータの利用拡大速度があまりに早く，我々の計算に対する認識が追いついていない現状がある．NP 問題の計算困難さがそのよい例である．

計算複雑さの理論は誕生当初から数理論理学と深く結び付いている．例えば，計算機科学の最も根本的な定理のひとつである Cook-Levin の定理は，命題論理式の充足可能性判定という数理論理学の基礎的な問題が NP 完全という性質をもつというものである．この事実により P≠NP？や NP≠coNP？という計算限界に関連する重要な未解決問題は，「証明が存在するとき，それを（効率よく）見出せるか」という問いと捉えることができ，それゆえ，数理論理学的な計算量解析は計算限界研究の王道であるといえる．論理式や推論に関する問題についての計算限界の解析は本計画の目的の一つである．

しかし，このような論理学の問題そのものの難しさの解析は，本研究の目指す論理学と計算限界の相関理解のうち片面にすぎない．もう一つの面は，論理学的視点の応用として得られる様々な手法を計算量の理解へ還流することである．例えば Immerman による NL＝coNL の証明は計算量クラスを表現する論理式の構造的複雑さを解析することで得られたし，AC0 回路の Haastad による限界は後に Razborov が証明の複雑さを解析したことで初めてその本質が真に理解された．これら 80～90 年代の飛躍的な結果は，素朴な組合せ論的に得られる考察を，数理論理学のレンズを通して再解釈することで得られたのである．本計画ではこのような数理論理学的視点が，現代においてはどのような課題について有効かを見極めた上で，他班とも連携してそれらの問題を集中的に探究する．

２．研究の目的

本研究では，主に記述の複雑さと証明の複雑さという二つの数理論理学的な視点から，P≠NP 予想などの計算限界の解明を試みる．また，計算限界解明の標準的な手法である情報理論・符号理論 (A02 班) に基づく議論や領域･回路計算量 (A03 班) からの解析技法，さらに，境界他分野 (統計力学 (C01 班)，量子力学 (C02 班), 学習理論 (C03 班)) の手法を数理論理学のレンズを通して解釈し直し，計算量解析を行う．また，これらの計算限界研究の成果を逆に利用し，B 班と連携することで数理論理学を用いた効率的なアルゴリズムを開発する．

計算限界を探る難しさは，計算というものがあまりに多様で汎用的であり，そのどの側面が計算能力の差をもたらすのか切り分け難いところにある．本計画は数理論理学の視点によってこの切り分けを進めようとするものであり，特に有望かつ重要な側面として以下の四つの差異に着目する．

1) 論理回路と論理式（計算における記憶の効果）
2) 決定性計算と乱択計算（ランダム性のはたらき）
3) 整数計算と実数計算（問題に内在する連続性）
4) オンライン計算とオフライン計算（情報欠損が計算に及ぼす影響）

これらの差異は密接に関連しており，総合的な考察が必要である．例えばここ数年で複数の研究者により 2) 算法ランダム性と 3) 実数計算との関係性が指摘されている．

３．研究の方法

上記の 1) 論理回路と論理式の能力差を解明することは，計算における「知識の再利用」の必然性を問う根本的な未解決課題であると同時に，L≠NL 予想にも密接に関係がある．その解明に向けて五十年来さまざまな試みがなされてきたが，極めて進展が乏しい現状にあった．本研究では，深さとサイズの二つのパラメータに着目し，領域・回路計算量 (A03 班) や境界他分野（C 班）と連携をとりながら，それらの能力差の解明を目指す．

上記の 2) である乱数をまったく用いない決定性計算と乱数を用いる乱択計算の差異に関しては，まず，代表的な NP 完全な問題である充足可能性問題ターゲットを絞り，解明を試みる．この研究においては，符号理論（A02 班）や統計力学における相転移や伝搬法を理解する（C01 班）ことで研究を遂行する．

また，計算量理論におけるランダム性 (乱

数）とは別に，論理学の伝統ある研究対象であるランダム性，すなわち，与えられた文字列の特徴を見いだすことの難しさ，すなわち記述の複雑さ・予測し難さ・特徴付け難さ(測度論的典型性）などで定義されるランダム性との関連などについても考察する．これまで論理学におけるランダム性は，記述・予測・特徴付けの手順の有り無しを議論することが多く，その手順の「容易性」（必要とする計算時間などの資源が少ない場合）の様相に関しては，ほとんど明らかにされていない．本研究ではその容易性に関して，量子力学(C02 班）的な側面も考慮に入れつつ研究を行う．

上記の 3）に関しては，そもそも計算理論は，整数など離散的な対象を扱うことで発展した．勿論，実数を含む連続的な問題を計算理論の俎上に載せるという問題意識そのものは本領域の開始以前からあり，計算の効率性を考えない限りにおいては帰納解析学として議論されてきた．近年，効率性を考慮にいれた(連続的な問題を扱うための)計算理論の枠組も整理されつつあり，簡単な図形操作や積分・微分方程式については計算可能性や計算量について一定の成果は収めていた．しかしながら，これらの成果の多くは，計算に対する「離散的な理解」を無理やり連続系問題に応用する側面が強く，連続系であればこそ意味をもつ要素, 例えば, 空間中での「一様さ」,「バランス」,「滑らかさ」などが計算に及ぼす役割はほとんど理解できていない状況にある. 本研究では, A の他班と協力し, 従来の離散的・記号的な計算理論が苦手とする上述の連続系特徴量が計算にどのような影響を与えるか解明を試みる．

上記の 4）のオンライン計算とは，入力が初めにすべて与えられるオフライン計算とは違い，入力の情報が逐次的に来る中で，それまでの情報のみで判断結果を出さねばならない状況をモデル化した計算問題の総称である．このような計算は，インターネット上での計算や，学習の場面などで登場する．オンライン計算では，完全な情報が最初に得られる場合の最適値との違いがどれくらいになるかという限界を解明し，その限界を達成するアルゴリズムを開発することが重要である．本研究では，売買契約のモデル化の一つであるキャンセルコスト付きオンラインナップサック問題を手掛かりとして，オンライン計算における計算限界解明をスタートする．この際，学習的側面に関しては C03 班，また，アルゴリズム論的側面に関しては B 班と連携をとりながら研究を進める．

４．研究成果

A. 深さ限定回路の解析

本研究は「論理回路と論理式の差異」に関する成果であり, ELC センターにおいて主に C01 班，C02 班との議論から得られた．これは計算量理論 50 年の歴史上初の結果であり，すでに国内外で高い評価を受けている．前節でも述べたように，論理回路と論理式の能力差（右図）を解明することは, 計算における「知識の再利用」の必然性についての根本的な問であると同時に， L≠NL 予想（P≠NP 予想のメモリ量限定版）にも直接に関係する重要な未解決問題の１つである．ロスマンは，深さ限定回路という制限下の計算においてではあるが，経路探索問題と呼ばれる基本的な問題に対する計算で，それらの計算能力に違いがあることを証明した．この歴史的な成果は, 結果の重要性ばかりでなく，それを得るために開拓した新たな解析技法についても注目を集めている．

本研究で扱った深さ限定の回路モデルは，計算限界解析ではよく用いられるものであり，その強力な解析技法として交換（スイッチング）理論が知られている．これは回路の下段（入力に近い演算素子）からの解析であり，計算の構造を順次小さい部分計算からの集成として理解しようとする自然な手法である．多くの組合せ的複雑さの解析に効果的である半面，この方法では「記憶の再利用による効果」は考慮から外されてしまうことになり，これゆえ長年にわたってこの効果の追跡は困難とされていた．ロスマンは，集合の新たな近似法を導入することでこの困難を克服し，上段（出力に近い素子）と下段の両方からの解析を成功させたのである．前述の交換理論がそうであったように，この斬新な解析技法も，その核となる考え方を理論化できるはずであり，それにより様々な解析技法の源となる強力な枠組を作ることができると思われる．それが本領域で目指す P≠NP 予想への道筋の１つであると大きな期待が寄せられている．

B. 連続性と滑らかさによる計算量低減効果の解析

本研究は「整数計算と実数計算の差異」に関連する成果であり，2013 年 2 月に行われた ELC Seminar などで招聘した Ziegler 氏らと議論で進んだ研究である．この研究は，従来の離散的計算理論が苦手とする「滑らかさ」という連続系特徴量が計算にどのような影響を及ぼすか初めて明らかにしたものであり，関連した成果により船井研究奨励賞や LA/EATCS 学生発表論文賞などを受賞している．

河村，Ziegler らは，滑らかな関数では様々な連続系計算が「容易」になるという数値計算論での経験則を，初めて厳密に計算量理論的に解析した．しかし意外にも，微分方程式については滑らかさのみからは必ずしも計算量が低減されないことが証明される結果となった．そこでさらに研究を進め，パラメータつき計算量を使った分析により，Gevrey 階層の意味での「強い」滑らかさこそが計算の容易さをもたらすことを突き止めた．解析関数において様々な計算が容易になる現象

は本成果の特殊な場合である．この成果は，連続関数についてのみ意味をもつ（数学の）解析学での複雑さと，これに関する存在定理を数理論理学的に定式化した際の証明の複雑さという，異なる複雑さ尺度のつながりを見出すことで得られた．

C．充足可能性問題 3-SAT に対する世界最速な決定性アルゴリズム
本研究は「決定性計算と乱択計算の差異」に関連する成果であり，玉置（A02），山本（C01）との共同研究による成果である．各節が高々3 個のリテラルをもつ 3-SAT は，SAT を制限した問題ではあるが，代表的かつ典型的な NP 完全問題であり，P≠NP 予想に直接的に関連する問題として広く研究されている．当然，この問題に対する多項式時間アルゴリズムが存在するかどうかは分かっていないのであるが，その重要性から，世界の研究者がその高速化（より正確には，解析的に指数部分を小さくすること）にしのぎを削っている．この状況は，例えば，スパコンでの計算速度（解析的な速度ではなく，実行速度），あるいは，物理における反陽子原子のエネルギー状態などの超精密計測に対応する．
本研究では，これまでに提案されていた乱択アルゴリズム（乱数を利用したアルゴリズム）の乱数の特質を明らかにし，乱数を置き換える計算を示すことで，世界最速の決定性（＝乱数を利用しない）アルゴリズムの開発に成功した．具体的には，2 のべき乗の空間を玉置（A02）の符号理論を用いて，可変的なコーディング被覆を形成し，さらに，山本（C01 班）の共同の下で統計力学的なアイデアを用いて解析することで乱数を用いない最速アルゴリズムを構成した．

D．オンラインナップサック問題に対する最適競合比アルゴリズムの設計
「オンライン計算とオフライン計算の差異」に関連する成果であるが，「決定性計算と乱択計算の差異」を深く考察することにより得た成果でもある．なお，これは，博士課程の学生であり本研究の研究補助者である河瀬と招聘研究者である Han（大連理工大学）との共同研究による成果であるが，本研究領域のセミナーなどで B 班，および，C 班との活発な意見交換から生まれた成果ともいえる．また，これに関連する成果により，the 9th International Conference on Algorithmic Aspects of Information and Management における Best Paper Candidate や日本オペレーションズ・リサーチ学会「最適化の理論と応用」研究部会の最優秀発表賞などを受賞している．
入力の情報が逐次的に来る中で過去の情報のみから判断を出さねばならないオンライン問題のうち，キャンセルコスト付き（重みなし）オンラインナップサック問題を考察した．これは，コストを支払うことでキャンセルが可能となる売買契約のモデル化である．この問題において，オフラインの場合の最適値との違いがどれくらいになるかという限界（下界）を解明すると同時に，その限界を達成する決定性アルゴリズムの開発に成功した．この成果はオンラインナップサック問題の重要性から非常に意義深いのである．今後は，本限界手法をパッキング型最適化問題などに対して拡張し，幅広い問題に対して限界を達成するアルゴリズムの設計法の構築を目指す．

それ以外にも，
離散最適化の基礎的をなす最適合成順問題に対する計算限界解明：離散最適化の基礎的な問題である最適合成順問題は、時間依存スケジューリング問題や順序なし秘書問題の一般化である。これまで未解決とされていた単調非減少な線形である場合に、初めて多項式時間アルゴリズムを構築するとともに計算限界を解明する。ISAAC2016 Best Paper Award
領域計算量における画期的成果：領域計算量の基準下で、決定性と非決定いう計算モデルに能力の差を示すことは計算の本質を理解する上で非常に重要である。計算量理論で最も重要な予想の一つである NC[log n]≠AC[log n]に迫る画期的成果を得る。より正確には、任意の k=o(log n)に対して、NC[k]≠AC[k]を示す。FOCS2015 Best Paper Award
ラズボロフ氏のネバリンナ賞を超える単調論理回路に関する成果：１９９０年にネバリンナ賞を獲得したラズボロフ氏の単量論理回路における非多項式下界をさらなる改善する画期的成果 CCC2015 Best Paper Award
30 年以上未解決だった組合せ最適化問題に対する初の多項式時間アルゴリズム(B01 班との共同研究)：重み付きの線形マトロイドパリティ問題は離散最適化分野の基礎をなす重要な問題である。この問題の多項式時間可解性は 30 年以上の間未解決だったが、初めての多項式時間アルゴリズムを与えた。FOCS2017 Best Paper Award

など，多数の画期的成果を得た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　９４件）

Satoru Iwata, Yusuke Kobayashi, A weighted linear matroid parity algorithm, the 49th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 264-276, 2017.

Yasushi Kawase, kazuhisa Makino, Kento Seimi, Optimal Composition Ordering Problems for Piecewise Linear Functions,

the 27th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC), 42:1–42:13, 2016.

Benjamin Rossman, Rocco A. Servedio, Li-Yang Tan, An average–case depth hierarchy theorem for boolean circuits, IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 1030–1048, 2015.

Benjamin Rossman, The average sensitivity of bounded–depth formulas, IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 2015, 424–430.

Benjamin Rossman, Correlation Bounds Against Monotone NC^1, Conference on Computational Complexity 2015, 392–411, 2015.

Benjamin Rossman, Formulas vs. circuits for small distance connectivity, The 46th annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 2014, 203–212.

Xin Han, Yasushi Kawase, Kazuhisa Makino, Randomized algorithms for removable online knapsack problems, Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management (FAW–AAIM), 2013, 60–71.

Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto, Derandomizing the HSSW Algorithm for 3-SAT. Algorithmica 67(2), 2013, 112-124.

〔学会発表〕（計７０件）

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0件）

○取得状況（計　0件）

〔その他〕

ホームページ等
http://www.al.ics.saitama-u.ac.jp/elc/

６．研究組織
(1)研究代表者

牧野和久（MAKINO, Kazuhisa）
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：60294162

(2)研究分担者

河村彰星（KAWAMURA, Akitoshi）
九州大学・システム情報科学研究院・准教授
研究者番号：20600117

垣村尚徳（KAWAMURA, Naonori）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：30508180

小林佑輔（KOBAYASHI, Yusuke）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：40581591

ロスマン　ベンジャミン（ROSSMAN Benjamin）
トロント大学・数学計算機科学部・助教
(当時、国立情報学研究所)
研究者番号：90599177

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

クック　ステファン（COOK Stephen）
トロント大学・計算機科学部・名誉教授

ツィーグラー　マーティン（ZIEGLER Martin）
KAIST大学・計算機科学部・教授

グルビッティ　ブラディミア（GURVICH Vladimir）
ロシア国立高等経済学院・教授

ボロシュ　エンドレ（BOROS Endre）
ラトガース大学・経営学部・教授