

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 8 月 5 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03605

研究課題名(和文) 志村多様体，局所志村多様体とそのエタールコホモロジー

研究課題名(英文) Shimura varieties, local Shimura varieties and their etale cohomology

研究代表者

三枝 洋一 (MIEDA, Yoichi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：70526962

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,800,000円

研究成果の概要(和文)：エルミート対称空間の数論的商である志村多様体，およびその局所版である局所志村多様体について， p 進幾何的な手法を主に使って研究を行った。まず，前アーベル型という非常に広い範囲の志村多様体に対して潜在的良還元部分を構成し，それが志村多様体全体とほとんど同じエタールコホモロジーを持っていることを明らかにした。また，法 p 還元を利用して局所志村多様体のエタールコホモロジーを計算する新しい方法を導入し，それを $GL(n)$ の明示的局所ラングランズ対応へと応用する研究を行った。さらに， $GSp(4)$ の局所志村多様体について詳細に調査を行い，そのエタールコホモロジーと局所ラングランズ対応の関係についての成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究のテーマである志村多様体や局所志村多様体は，保型表現とGalois表現が結び付くことを主張するラングランズ対応と関係しているがゆえに，整数論において特に興味を持たれている幾何学的対象である。本研究で得た成果によって， $GL(n)$ の局所ラングランズ対応の具体的なふるまいを詳しく調べる手段が得られたことになる。また， $GSp(4)$ の局所志村多様体についての成果は，局所ラングランズ対応の精密化である局所Arthur分類もまた局所志村多様体と関係しているだろうという示唆を与えており，今後の当該分野の研究の指針となることが期待される。

研究成果の概要(英文)：Shimura varieties are algebraic varieties obtained as arithmetic quotients of Hermitian symmetric spaces, and local Shimura varieties are their local counterparts. I studied them mainly by using p -adic geometric technique. First, for a fairly wide class of Shimura varieties, called the preabelian type, I constructed the potentially good reduction loci and proved that they have almost the same etale cohomology as that of the whole Shimura varieties. I also introduced a new method computing the etale cohomology of local Shimura varieties by means of their modulo p reductions, and apply it to study the explicit local Langlands correspondence for $GL(n)$. I investigated the local Shimura variety for $GSp(4)$ in detail, and obtained results on relation between its etale cohomology and the local Langlands correspondence.

研究分野：整数論

キーワード：志村多様体 局所志村多様体 ラングランズ対応 エタールコホモロジー リジッド幾何

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

数論における重要な問題の一つに、大域ラングランズ対応と呼ばれるものがある。これは、代数体上の保型表現と Galois 表現という、数論における 2 つの主要な研究対象の間に緊密な関係が存在することを主張する予想である。大域ラングランズ対応の設定において、代数体を p 進体に、保型表現を p 進簡約群の既約表現に置き換えたものが局所ラングランズ対応である。これは大域ラングランズ対応の局所成分となるべきものであり、比較的研究が進んでいるものの、未解明の部分も多い研究課題である。

大域ラングランズ対応は、志村多様体と呼ばれる代数多様体と深い関わりがあることが観察されてきた。志村多様体のエタールコホモロジーの既約分解を見ることで保型表現と Galois 表現を結び付けようとするのが、これまでの大域ラングランズ対応に対する主要な戦略であったが、その戦略を完遂する際に障害となる、様々な技術的困難が残されているという状況であった。

大域の場合と同様、局所ラングランズ対応も局所志村多様体と呼ばれる幾何学的対象と深い関わりがあることが観察されてきた。志村多様体とは異なり、局所志村多様体は代数多様体ではなく、 p 進解析空間というものになる。志村多様体と比べて局所志村多様体の歴史は非常に短く、知識の蓄積も少ない。局所ラングランズ対応と局所志村多様体の関係についても、部分的な結果はあるものの、未知の部分が多い状況であった。

2. 研究の目的

類体論の非可換化・一般化である大域ラングランズ対応、およびその局所類似である局所ラングランズ対応を幾何学的な立場から理解することが主要な目的であった。大域ラングランズ対応は、エルミート対称空間の数論的商である志村多様体のエタールコホモロジーと深く関係している。そこで本研究では、志村多様体の p 進体上の類似である局所志村多様体についての基礎研究を行い、 p 進簡約代数群の表現論や局所ラングランズ対応を幾何学的に研究するための土台を確立することを目指した。また、志村多様体と局所志村多様体との関係をできるだけ一般の設定において追求することで、志村多様体のエタールコホモロジーを調べるための、強力かつ見通しのよい手法を提供することを目指した。

3. 研究の方法

p 進幾何 (リジッド幾何) の手法を中核として研究を行った。局所志村多様体はそもそも p 進解析空間であるため、それを扱うためには p 進幾何的な手法が必須である。志村多様体は代数多様体であるが、代数多様体も p 進解析空間と見ることができ、そのようにした方が局所志村多様体と関連付けて研究がしやすいのである。

志村多様体・局所志村多様体は射影系をなしており、その射影極限は、パーフェクトイド空間という扱いやすい空間になることが Scholze や Weinstein らの近年の研究によって知られていた。本研究では、研究代表者がこれまで蓄積してきた古典的な p 進幾何の技法と、2011 年に生まれた新しい理論であるパーフェクトイド空間の理論を組み合わせることで、志村多様体や局所志村多様体のエタールコホモロジーを分析する新しい手段を創出することを目指した。

4. 研究成果

(1) 前アーベル型志村多様体の潜在的良還元部分

志村多様体の典型的な例として、Siegel モジュラー多様体が挙げられる。これはアーベル多様体のモジュライ空間である。 p 進体上のアーベル多様体は、法 p 還元をしてもアーベル多様体になるとき、良還元を持つと言われる。 p 進体上で Siegel モジュラー多様体を見ると、その各点はアーベル多様体に対応するので、「対応するアーベル多様体が良還元を持つ部分」(良還元部分) を考えることができる。これはリジッド開集合になる。実は、Siegel モジュラー多様体全体よりも、良還元部分の方が、局所志村多様体と結び付けやすいということがこれまでの研究で分かっていた。このような状況を踏まえ、今井直毅氏 (東京大学) と共同で以下の問題に取り組んだ。

- 志村多様体がモジュライ空間としての記述を持たない場合でも、良還元部分を考えることはできるか？
- 志村多様体全体のエタールコホモロジーと良還元部分のエタールコホモロジーはどのくらい異なるのか？

得られた成果は以下の通りである：

- 志村多様体が前アーベル型と呼ばれるクラスに属するならば、良還元部分の定義を少し変更した、「潜在的良還元部分」というリジッド開集合を定義することができる。
- 潜在的良還元部分のエタールコホモロジーは、志村多様体全体のエタールコホモロジーと同じ尖点部分を持つ。

なお、考える範囲を前アーベル型というクラスに限っているが、通常考えるほとんど全ての志村多様体が前アーベル型となるため、実用的には問題がないことを注記しておく。

証明は、志村多様体上の保型局所系をうまく用いて、Siegel モジュラー多様体の場合に帰着させることで行われる。この成果は、後述の(3)の研究において有効に用いられた。

(2) 局所志村多様体のエタールコホモロジーの新しい分析方法と、その明示的局所ラングランズ対応への応用

F を p 進体とする。 $GL_n(F)$ の局所ラングランズ対応により、 $GL_n(F)$ の既約超尖点表現は F の Weil 群 W_F の n 次元既約表現によってパラメータ付けられることが知られている。その一方で、具体的な既約超尖点表現がどのようなパラメータを持つかという問題（明示的局所ラングランズ対応と呼ばれる）についてはまだ分かっていないことが多い。この問題に対し、 $GL_n(F)$ の局所志村多様体である Lubin-Tate 空間を用いて取り組む手法を開発した。

Lubin-Tate 空間は高さ n の一次元形式 O_F 加群の普遍変形空間として定義されるリジッド空間のエタール被覆の射影系であり、そのエタールコホモロジーには $GL_n(F)$ の局所ラングランズ対応が現れることが知られている（非可換 Lubin-Tate 理論）。Lubin-Tate 空間の射影極限をとったものはパーフェクトイド空間の構造を持ち、Lubin-Tate パーフェクトイド空間と呼ばれている。この Lubin-Tate パーフェクトイド空間のよいアフィノイド開集合を探し、その還元のエタールコホモロジーを計算するというタイプの研究が、近年多数の研究者によってなされている。そこで、非可換 Lubin-Tate 理論とアフィノイドの還元を計算を組み合わせることで明示的局所ラングランズ対応の結果を導くことができるのではないかとこの着想を得た。この戦略を実行する際には、アフィノイドパーフェクトイド空間のエタールコホモロジーとその還元のエタールコホモロジーを比較するという基礎的な問題を解決する必要がある。この問題に取り組み、還元のエタールコホモロジーからパーフェクトイド空間のエタールコホモロジーに単射があるための使いやすい十分条件を見つけることに成功した。さらにその応用として、 $GL_n(F)$ の既約超尖点表現 に対し、

- (a) が深度 0
- (b) が単純超尖点表現
- (c) n が F の剰余標数 p と異なる素数である

のいずれかが成立するときに、 に対応する W_F の n 次元既約表現を明示的に決定できた。(c) は津嶋貴弘氏（千葉大学）との共同研究である。

明示的局所ラングランズ対応に関する上記の結果は、いずれも先行研究で得られたものの別証明となっているが、上記の手法は先行研究とは異なり、超尖点表現の指標や局所 Galois 表現の因子等に関する具体的な計算を一切必要としないという長所がある。それゆえ、Lubin-Tate パーフェクトイド空間のアフィノイドの還元を計算をさらに進めることで、先行研究に含まれない新しい結果が多数得られることが強く期待できる。

本研究においては、考える局所志村多様体を Lubin-Tate 空間に限っているが、手法をさらに洗練させることで、より一般の局所志村多様体に対しても適用可能になると予測している。これは今後の研究課題である。

(3) $GSp(4)$ に対する局所志村多様体の研究

斜交群 $GSp(4)$ に対する局所志村多様体(この場合、通常 Rapoport-Zink 空間と呼ばれる)は、ある意味で Lubin-Tate 空間の次に簡単な局所志村多様体であるといえる。この局所志村多様体のエタールコホモロジーと局所ラングランズ対応の関係を明らかにすることは重要な課題であり、本研究課題の開始以前より、伊藤哲史氏（京都大学）と共同で研究を進めていた。本研究課題のもとでの研究によって、以下の通り、大きな進展があった。

- (a) $GSp(4)$ (より一般に、 $GSp(2n)$) に対する局所志村多様体のエタールコホモロジーは、非常に強い有限性を満たす。より具体的には、エタールコホモロジーに現れる、 $GSp(4)$ およびその内部形式の表現が長さ有限になる。
- (b) $GSp(4)$ に対する局所志村多様体のエタールコホモロジーの「 $GSp(4)$ 超尖点部分」は、 $GSp(4)$ およびその内部形式の局所 Arthur 分類を用いて完全に記述できる。
- (c) (b) のエタールコホモロジーを導来圏の対象と見ると、モノドロミー作用素および Lefschetz 作用素を通して、局所 Arthur 分類の一部が還元される。

(a) は、研究代表者のこれまでの研究のいくつか（例えば、 $GSp(4)$ の局所志村多様体のエタールコホモロジーと Zelevinsky 対応の関係）において、仮定として要請していたものである。(a) が解決したことで、それらの結果が無条件で成り立つことになる。(a) の証明では、Chen-Fargues-Shen, Kaletha-Weinstein および Scholze-Weinstein によって最近得られた、一般の局所志村多様体に対する「双対同型」を用いる。

(b), (c) に現れる局所 Arthur 分類とは、局所ラングランズ対応の精密化である。(b) の証明の鍵は、これまで蓄積してきた研究成果と、 p 進簡約代数群の表現の間の Ext 群に関する表現論的な結果を結び付けることであった。

(c) は (b) から比較的容易に従うが、 $GSp(4)$ よりも一般の場合を考える際の指針となる、重要な成果だと捉えている。

(4) その他の研究成果

(1)~(3)以外に、以下の研究成果を得た。これらの研究には、志村多様体・局所志村多様体のエタールコホモロジーが直接登場するわけではないが、研究手法や着想までのプロセスに共通点がある。

伊藤哲史氏(京都大学)、越川皓永氏(京都大学)と共同で、有理数体上の $GL(3)$ の自己共役的でない尖点的保型表現に対応する Galois 表現の研究を行った。近年 Harris-Lan-Taylor-Thorne および Scholze によって、このような保型表現に対応する Galois 表現が構成されたが、幾何との関わりは一般には未解明である。その一方で、van Geemen と Top は、1994 年の論文において、レベル 128 の特定の尖点的保型表現 ${}^{\vee}GT$ に注目し、それに対応する Galois 表現がある曲面の 2 次エタールコホモロジーに現れることを数値実験に基づき予想していた。この予想が実際に正しいことを証明し、さらに、その系として、 ${}^{\vee}GT$ に対する Ramanujan-Petersson 予想や局所・大域整合性などの結果を得た。

p 進体上の斜交群および準分裂偶数次特殊直交群の単純超尖点表現に対する形式次数予想を、 $p>2$ という条件のもとで解決した。同様の結果は、斜交群や特殊直交群のサイズに関する若干の仮定のもとで、大井雅雄氏によって既に得られていたが、その仮定を外すことができるという研究成果である。証明のアイデアは、Deligne による混標数と等標数の局所体の Galois 群を比較する結果を用いて等標数に移り、Kloosterman 層の理論を用いるというものである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoichi Mieda	4. 巻 2020
2. 論文標題 On irreducible components of Rapoport-Zink spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 2361-2407
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rny086	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Naoki Imai and Yoichi Mieda	4. 巻 2
2. 論文標題 Potentially good reduction loci of Shimura varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tunisian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 399-454
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） http://dx.doi.org/10.2140/tunis.2020.2.399	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoichi Mieda	4. 巻 147
2. 論文標題 Note on weight-monodromy conjecture for p-adically uniformized varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1911-1920
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/proc/14375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoichi Mieda	4. 巻 -
2. 論文標題 Parity of the Langlands parameters of conjugate self-dual representations of $GL(n)$ and the local Jacquet-Langlands correspondence	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） http://dx.doi.org/10.1017/S1474748019000045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoichi Mieda	4. 巻 -
2. 論文標題 Arthur分類とその応用	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS講究録別冊「代数的整数論とその周辺2016」	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Cohomology of affinoids in the Lubin-Tate space at infinite level and their reductions
3. 学会等名 2016 AS-NCTS Workshop on Shimura Varieties and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Cohomology of affinoids in the Lubin-Tate space at infinite level and their reductions
3. 学会等名 2016 Seoul-Tokyo Conference on Number Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Cohomology of affinoid perfectoid spaces and their reductions
3. 学会等名 p-adic methods in arithmetic geometry at Sendai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Compactly supported cohomology of affinoid perfectoid spaces and their reductions
3. 学会等名 Workshop on Shimura varieties, representation theory and related topics (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Parity of the Langlands parameters of conjugate self-dual representations of $GL(n)$ and the local Jacquet-Langlands correspondence
3. 学会等名 Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Arthur分類とその応用
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Cohomology of affinoid perfectoid spaces and their reductions,
3. 学会等名 Arithmetic and geometry of local and global fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Toward Fargues' conjecture for $GL(3)$
3. 学会等名 Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Cohomology of perfectoid spaces and their reductions, with application to the local Langlands correspondence
3. 学会等名 Arithmetic and Algebraic Geometry 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 On the formal degree conjecture for simple supercuspidal representations
3. 学会等名 Workshop on arithmetic geometry, Tokyo-Princeton at Komaba (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Local Saito-Kurokawa A-packets and l -adic cohomology of Rapoport-Zink tower for $GSp(4)$
3. 学会等名 Arithmetic Geometry and Representation Theory (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 Local Langlands correspondence and p-adic geometry
3. 学会等名 NTU Mathematics Colloquium (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 ある代数曲面のエタールコホモロジーとGL(3)の自己双対的でない保型表現の関係について
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 三枝 洋一
2. 発表標題 明示的局所ラングランズ対応への幾何学的アプローチ
3. 学会等名 九州大学代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

三枝洋一のウェブサイト http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/index-j.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----