

令和元年9月6日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15H03607

研究課題名(和文) 双有理幾何学的手法によるリジッド幾何学の基礎

研究課題名(英文) Foundations of rigid geometry from birational viewpoint

研究代表者

藤原 一宏 (FUJIWARA, KAZUHIRO)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00229064

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,400,000円

研究成果の概要(和文)：継続研究であるリジッド幾何学の基礎の確立を目指し、新たな結果も加えて加藤文元(東工大)との共著 "Foundations of rigid geometry I" (EMS, 2018) を出版した。特にフィルター付き環のスペクトルの理論はこの研究計画中に得た新たな視点であると考えている。また、リジッド幾何学と密接な関係にあるパーフェクトイド空間の研究も開始した。パーフェクトイド空間は P. Scholze による発見以降様々な応用が考えられているが、研究代表者はコホモロジーの純性予想の説明を試み、特にエタールコホモロジーの純性定理の別証明などを与えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リジッド幾何学とは非アルキメデス解析をベースとした解析幾何学である。非アルキメデス解析は通常現れる実数に基づいた解析と異なる側面があり、特に代数的な視点が多く現れる。またリジッド幾何学的対象が整数論に現れることが多いため、その研究は整数の持つ隠れた幾何学的性質や代数的構造の理解に役立つ。研究代表者は以前より「リジッド幾何学とは形式幾何学の双有理幾何学である」との視点に基づいた研究を行っており、国際的にも独自性が高いものと考えている。確固とした基礎理論は科学にとって重要であり、この研究期間中にもヨーロッパ数学会出版局からリジッド幾何学の基礎付けを著書として発表している。

研究成果の概要(英文)：Aimed for establishing foundational aspects of rigid geometry, "Foundations of rigid geometry I" (joint with F. Kato at titech) was published from EMS (2018). A new aspect, i. e., spectral theory of filtered rings, is added during the project. Also, perfectoid spaces, which have close connection to rigid geometry, are put into our plan. After P. Scholze's introduction, many applications of perfectoid spaces are known up to now. The principal investigator has tried to understand phenomena behind cohomological purity conjectures from perfectoid viewpoint, and has given a new proof of the absolute purity conjecture.

研究分野：数論幾何学

キーワード：リジッド幾何学 数論幾何学 代数幾何学 整数論 可換環論 モチーフ理論 パーフェクトイド空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は数論の重要な分野である非可換類対論に関連する研究を行ってきた。特に、正標数の代数多様体の Lefschetz 跡公式に関する予想 (Deligne の予想) を解決しているが、その際にリジッド幾何学を使って研究するという方向性を確立した。現在非可換類体論や、それに関連する数論幾何学ではリジッド幾何学的手法は大前提とされることが多い。しかしながら今世紀に至るまでその基礎付けが十分な形で確立されていると言いきれない状況であった。

### 2. 研究の目的

本研究では研究代表者の継続プロジェクトの一つである「リジッド幾何学の基礎」を具体的な応用を視野に入れつつ確立することを目標とする。本研究は「リジッド幾何学とは形式幾何学から作られた双有理幾何学である」という視点に基づいて行われる。扱う対象としては継続研究を通し導入された UAP 空間や, quasi-excellent 空間の研究に重点を置く。応用として代数多様体や代数空間, 代数スタックなど数論幾何学に自然に現れる空間を階層化 (stratification) とリジッド幾何学を使い分析することを目指す。

### 3. 研究の方法

テーマが数論, 代数幾何学 (特に双有理幾何学) など多くの分野と関連するため, 国内外における連携が重視される。若手研究者との連携も考慮され, RA 雇用なども行う。研究は国際的な協力体制の下に行われ, 成果は論文発表だけでなく research monograph での公表も予定している。

### 4. 研究成果

2015 年度に UAP 空間の基礎理論を考察した。まず基本となる UAP 環の一般論がほぼ完成し, その意外な特徴付けが得られた。結論は簡明であり, UAP な adic 環は 普遍リジッドネーター adic 環と一致する。これにより従来取り組んでいた基礎付けの枠組みが十分一般であることが保障され, かつ新たな特徴付けが得られた。この結果及び関連した proper dominant descent については 2015 年 8 月にタヒチで行われた国際研究集会「Non-archimedean analytic geometry: Theory and Practice」においてタイトル「Proper dominant descent in rigid geometry」として口頭発表を行った。これらの結果は research monograph としての発表を検討中である。

2016 年度からは UAP 空間 とならない重要なクラスである (P. Scholze (Bonn)) により導入された) パーフェクトイド空間を含めた考察を開始している。また, M. Temkin による先行研究を進展させ, 一般の非アルキメデス的な Banach 環のスペクトルがフィルトレーション付きの環のスペクトル理論として構成できることを見出した。スペクトルは結果的に K.S. Kedlaya が発見していた reified valuation の空間と同じものとなることも分かったが, この枠組みで新たに分かったことも多く, 特に位相的性質の研究に強力な手法を与える。例えば Temkin や A. Ducros (パリ第六大学) による Berkovich 空間の Gerritzen-Grauert 型の定理も簡単に得られる。また, パーフェクトイド空間にも適用可能なことも重要である。この研究成果は加藤文元 (東工大, 研究分担者) との共著の research monograph 「Foundations of rigid geometry I」の Appendix に新たに付け加え, 2018 年に公表した (今後 volume II の公刊も検討している)。

2017 年度にはよりパーフェクトイド空間と関係した方向に進展した。その背景として 2016 年に可換環論において重要であった「直和因子予想」がパーフェクトイド空間を使うことにより Y. Andre により解決されたことがある。直和因子予想は「ホモロジカル予想」と呼ばれるものの一部であり, この方向での急速な進歩が予想されたため, 勉強会「可換環論と数論幾何の新展開～ホモロジカル予想を通じて～」を高橋亮 (名古屋大学, 連携研究者) と共に 2017 年 6 月 25-26 日に名古屋大学で開催した。結果として数論, 代数幾何, 数論幾何, 可換環論など様々な分野の専門家の交流が生じ, 相互作用が生まれている。

研究代表者も刺激を受け, 2018 年度にかけパーフェクトイド空間の数論幾何への応用を考察し, コホモロジー群の消滅予想, 特に (正則スキームに対する) 平坦コホモロジー群の純性予想を研究した。特に, エタールコホモロジー群に対する純性定理に見通しのよい証明を与えている。その際必要となるパーフェクトイド空間の基礎は平成 28 年度途中から 1 名 RA 採用し詳細を検討しており, 今後の発表を予定している。

さらに混標数かつ非自明な 1 のべき根を含む場合の平坦コホモロジーについても考察を進め, 上記エタールコホモロジー群の純性と合わせ国際研究集会「Motives in Tokyo 2018」で口頭発表した。K. Cesnavicius (CNRS), Scholze も関連結果を得ており, この研究の独自な点を今後発展させるつもりである。

上記研究は数論幾何の側面を強く持ち, 特にパーフェクトイドはホモトピー論的手法と組み合わせることにより p-進ホッジ理論と関係する。そのため, 2018 年度には L. Hesselholt (名古屋) に分担者に加え対応した他, 東京大学で例年行われているモチーフ理論の研究集会「Motives in Tokyo」に協力し, 海外研究者の招聘及び情報収集に努めてきた。Motives in Tokyo に関しては連携研究者との情報交換の場としても有益なものになっている。

以下が Motives in Tokyo で招聘に関わったリストである（所属は当時のもの）。

2016/2/15-19

Aravind Asok (Los Angeles)  
Stephen Lichtenbaum (Brown)  
Goncalo Tabuada (MIT)  
Jens Hornbostel (Wuppertal)

2017/2/20-24

Amnon Neeman (Canberra)  
Amalendu Krishna (TIFR)  
Patric Brosnan (Maryland)  
Baptiste Morin (Bordeaux)

2018/3/26-30

Olivier Wittenberg (ENS)  
Kay Rulling (Berlin)

2019/2/12-15

Hakon Kolderup (Oslo)  
Tom Bachman (MIT)

全体を通し、当初想定していた範囲での成果は着実に得られているが、今後の新たな方向性も見えてきており、継続的に研究を続ける予定である。

## 5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Hesselholt, L.

Topological Hochschild homology and the Hasse-Weil zeta function  
Contemp. Math., 157-180, 2018

Kato, F.,

On henselian rigid geometry, Taiwanese J. Math. 21, no.3, 531-547, 2017

Allcock, D., Kato, F., A fake projective plane via 2-adic uniformization with torsion,  
Tohoku Math. J., (2) 69, 221-237, 2017

Cornelissen, G., Kato, F., Kool, J.

A combinatorial Li-Yau inequality and rational points on curves  
Math. Ann., 361, 211-258, 2015

〔学会発表〕(計 4 件)

Hesselholt, L.,

Higher algebra and arithmetic,  
Rothschild lecture, Isaac Newton Institute, 2018

Fujiwara, K.,

Cohomological purity from perfectoid viewpoint,  
Motives in Tokyo 2018, Tokyo, March 2018

Fujiwara, K.,

Proper dominant descent in rigid geometry,  
Non-archimedean analytic geometry: theory and practice, Papeete, French Polynesia,  
August 2015

Kato, F.,

Zariski Main theorem for henselian rigid spaces,  
Non-archimedean analytic geometry: theory and practice, Papeete, French Polynesia,  
August 2015

〔図書〕(計 1 件)

Fujiwara, K., Kato, F.  
Foundations of rigid geometry I  
EMS publishing house, pp. 863, 2018

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

特になし

## 6. 研究組織

研究代表者

藤原 一宏

FUJIWARA KAZUHIRO

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

00229064

平成 27-30 年度

### (1)研究分担者

加藤 文元

KATO FUMIHARU

東京工業大学・理学院・教授

50294880

平成 27-29 年度

ヘッセルホルト ラース

HESELHOLT LARS

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

10436991

平成 30 年度

### (2)研究協力者

大久保 俊

OHKUBO SHUN

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教

20755160

平成 27 年度

加藤 文元  
KATO FUMIHARU  
50294880  
平成 30 年度

金銅 誠之  
KONDO SHIGEYUKI  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授  
50186847  
平成 27-30 年度

斎藤 毅  
SAITO TAKESHI  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
70201506  
平成 27-30 年度

斎藤 秀司  
SAITO SHUJI  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
50153804  
平成 27-30 年度

高橋 亮  
TAKAHASHI RYO  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授  
40447719  
平成 29-30 年度

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。