

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03609

研究課題名(和文) 数論的基本群に関する数論幾何学の諸問題とその相互関係

研究課題名(英文) Various problems in arithmetic geometry concerning arithmetic fundamental groups and their interrelationships

研究代表者

玉川 安騎男 (Tamagawa, Akio)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：00243105

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,900,000円

研究成果の概要(和文)：当初の研究実施計画の通り、本補助金及び他経費の使用により、海外研究協力者の Christopher Rasmussen氏、Anna Cadoret氏、Mohamed Saidi氏の来訪を期間中ほぼ毎年度実現し、数論的基本群に関する数論幾何について、当初の研究目的を十分に果たすことができた。Rasmussen氏との共同研究では、期間中3編の共著論文を公表し、さらに1編準備中である。Cadoret氏との共同研究では、期間中4編の共著論文を公表し、さらに1編投稿中、4編準備中である。Saidi氏との共同研究では、期間中4編の共著論文を公表し、さらに1編投稿中、3編準備中である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、代数多様体の数論的基本群の群論的及び数論幾何学的構造を解明する、というのが究極の目的であり、そのために、6つの具体的重要問題とその相互関係の究明を目指して研究を行った。3名の海外研究協力者 (Christopher Rasmussen、Anna Cadoret、Mohamed Saidi) との3つの共同研究を中核として、これら6つの問題全てに対して多数の重要な知見を得て、研究期間中に計13編の論文を公表、さらに投稿中・準備中の論文も10編以上ある。これらの研究成果を通じて、当該研究分野の進展に大きく貢献できたのと同時に、国際研究ネットワークを持続発展させることができた。

研究成果の概要(英文)：As the original research plans, I invited each of my three overseas collaborators -- Christopher Rasmussen, Anna Cadoret and Mohamed Saidi -- almost every year during the period, by means of the present kakenhi grant and other financial sources, and made sufficient research achievements on arithmetic geometry concerning arithmetic fundamental groups. During the period, I published three joint papers with Rasmussen and had one more in preparation; published four joint papers with Cadoret, submitted one more and had four more in preparation; and published four joint papers with Saidi, submitted one more and had three more in preparation.

研究分野：整数論・数論幾何学

キーワード：代数曲線 被覆 基本群 ガロア表現 アーベル多様体 正標数 国際研究者交流

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、研究開始前の約10年間に、以下の3名の外国人研究者の訪問を、それぞれほぼ毎年1、2回ずつ受けてきた: Christopher Rasmussen(米ウエズリアン大)、Anna Cadoret(仏ソルボンヌ大)、Mohamed Saidi(英エクセター大)。いずれも当初は先方からの希望で訪問が実現したのだったが、幸運にも3名それぞれとの共同研究がスタートし、10年間で既にいくつかの研究成果が得られていた。

### 2. 研究の目的

代数多様体の数論的基本群の群論的及び数論幾何学的構造を解明する、というのが究極の目的である。そのために、特に次の6つの具体的重要問題とその相互関係の究明を目指す。

- A. 代数体上のアーベル多様体に関する有限性予想 (Rasmussen-Tamagawa 予想)
- B. 有限生成体上の代数多様体の数論的基本群の1進表現に対する普遍下界像存在予想。
- C. 有限生成体上の代数多様体の数論的基本群の法1表現系に対する普遍下界像存在予想。
- D. 有限体上の代数曲線の数論的基本群に関する副遠アーベル幾何 (特に、 $\mathbb{F}_q$ の場合)
- E. 正標数代数閉体上の代数曲線の基本群のモジュライ依存性。
- F. 有限生成体上のアーベル多様体の離散的 Shafarevich-Tate 群の自明性。

このうち、問題 A は Rasmussen との共同研究、問題 B、C は Cadoret との共同研究、問題 D、E、F は Saidi との共同研究の延長線上にある。問題 D、E は、また、研究代表者個人の20年以上前からの研究の延長線上にもある。

### 3. 研究の方法

本研究においては、3名の研究協力者(海外共同研究者) Christopher Rasmussen、Anna Cadoret、Mohamed Saidi との3つの共同研究が中核をなしている。このため、各研究協力者と最低年1回程度、直接の研究打合せ・研究討論を行い、研究計画を遂行していった。(繰越分の2020年度についてはコロナの影響で研究協力者の招へいが実施できなかったため、種々の電子ツールを用いたオンライン共同研究を代替的に導入した。)また、得られた成果の整理、発表、及び、国際研究集会・国際セミナーとの連携協力による、数論的基本群とその関連分野の集中的な情報収集の二点にも重点を置いた。上記6つの問題を並行して扱うというのは一見非効率のようだが、ある問題に対するアプローチが別の問題に対するアイデアを生み出したり、ある問題の究明が当初計画通りに進まないときには一旦ストップして別の問題の究明に当たったり、など横断性に基づく利点が発揮できる強みがある。実際、次項に述べるように、このような研究手法の下で、前項の6つの問題全てに対して多数の重要な知見を得て、当該研究分野の進展に大きく貢献できたのと同時に、国際研究ネットワークを持続発展することができた。

### 4. 研究成果

Rasmussen 氏との共同研究では、「研究の目的」A に関して、数体上のアーベル多様体の有限性定理について前年度までに作成した論文を修正・出版した(論文“Arithmetic of abelian varieties with constrained torsion”, Transactions of the American Mathematical Society, 2017); 数体上のアーベル曲面の還元に関する結果について前年度までに作成した論文を修正・出版した(論文“Abelian surfaces good away from 2”, International Journal of Number Theory, 2017); 射影曲線の1冪次巡回被覆のヤコビ多様体の1冪ねじれ点に関する Anderson・伊原の結果を一般化した論文を完成・出版した(論文“Cyclic covers and Ihara’s question”, Research in Number Theory, 2019); 上述の有限性定理に関する結果について、GRHの仮定下で有限性予想の上限の改良や局所的アプローチにおけるある整除性条件の改良を行った。また、「研究の目的」A、Cに関連して、代数体上の楕円曲線に付随するガロア表現の像に関する普遍下界存在予想の弱形である跡に関する普遍下界存在予想を定式化し、多くの場合に証明することができた(論文準備中)。

Cadoret 氏との共同研究では、「研究の目的」C に関して、前年度までに作成した、代数曲線の幾何的基本群の法  $l$  表現系の種数増大性定理についての論文（論文 “Genus of abstract modular curves with level- $l$  structures”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019）およびゴナリティー増大性定理についての論文（論文 “Gonality of abstract modular curves in positive characteristic”, *Compositio Mathematica*, 2016）を修正・出版した；一般線形群の有限部分群に関する Jordan-Nori の定理の精密化の証明と法  $l$  表現系の  $l$  独立性等の結果についての論文を修正・発表した（論文 “On the geometric image of  $F_l$ -linear representations of étale fundamental groups”, *International Mathematics Research Notices*, 2019）。また、「研究の目的」B に関して、アーベル多様体の族の共通同種因子に関する Roesler-Szamuely の予想を多くの場合に証明することができ、論文を完成した（論文投稿中）。また、「研究の目的」B に関連して、新しいタイプの Bertini の定理（almost tame 版）を証明した（論文準備中）。さらに、「研究の目的」B、C に関連して、 $l$  進、 $p$  進、超積の各係数に対する淡中圏論的 Cebotarev 密度定理を証明した（論文準備中）。

Cadoret 氏と Chun Yin Hui 氏（香港大）との共同研究では、「研究の目的」C に関して、幾何的半単純性に関する強い結果を得て、論文を作成・発表した（論文 “Geometric monodromy --- semisimplicity and maximality”, *Annals of Mathematics*, 2017）。また、「研究の目的」B、C に関して、Grothendieck-Serre/Tate 予想の  $l$  進版と法  $l$  版の比較、 $l$  進表現系の整半単純性に関する研究、超積係数のモノドロミーに関する研究、などを行った（論文 2 編準備中）。

Saïdi 氏との共同研究では、「研究の目的」E に関して、正標数の代数曲線族のファイバーの基本群の非定値性についてに関する結果についての論文を発表した（論文 “Variation of fundamental groups of curves in positive characteristic”, *Journal of Algebraic Geometry*, 2016）。また、「研究の目的」D に関して、有限体上の曲線やその関数体の副遠アーベル幾何における基本予想（Isom 版）について、前年度までに作成していた論文 2 編を修正・発表した（論文 “A refined version of Grothendieck's birational anabelian conjecture for curves over finite fields”, *Advances in Mathematics*, 2017, 論文 “A refined version of Grothendieck's anabelian conjecture for hyperbolic curves over finite fields”, *Journal of Algebraic Geometry*, 2018）；代数体の一変数代数関数体の遠アーベル幾何においてガロア群を長さ  $m$  最大可解商に置き換えた版について研究し、長さ  $m$  可解版 Neukirch・内田定理を確立した（論文投稿中）；この結果を有限体上の一変数代数関数体、標数 0 の有限生成体および正標数の有限生成体に拡張した（論文 3 編準備中）。さらに、「研究の目的」F に関して、有限生成体上の代数曲線に対するセクション予想への応用を持つ有限生成体上のアーベル多様体のセルマー群やテイト・シャファレヴィッチ群について、前年度までに作成していた論文を修正・発表した（論文 “On the arithmetic of abelian varieties”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2020）。

上述の通り、本研究においては、Rasmussen、Cadoret、Saïdi の 3 氏との 3 つの共同研究が中核をなしているが、研究目的・研究計画と関連して、いくつかの単独研究成果も得られた。「研究の目的」F に関する Saïdi 氏との共同研究に関連して、非可換副有限群係数 1 次コホモロジーに関するある局所大域原理を証明した（論文 “Specialization of  $l$ -adic representations of arithmetic fundamental groups and applications to arithmetic of abelian varieties”, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 2018）。また、「研究の目的」E に関連して、有限体の代数閉包上の全てのアフィン代数曲線が同種であることを証明した論文を完成・発表した（論文 “Correspondences on curves in positive characteristic”, *Contemporary Mathematics*, 2021）。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 11件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mohamed Saidi, Akio Tamagawa	4. 巻 27
2. 論文標題 A refined version of Grothendieck's anabelian conjecture for hyperbolic curves over finite fields	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 383 ~ 448
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/708	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Akio Tamagawa	4. 巻 97.2
2. 論文標題 Specialization of $l$ -adic representations of arithmetic fundamental groups and applications to arithmetic of abelian varieties	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of Symposia in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 573 ~ 595
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Christopher Rasmussen, Akio Tamagawa	4. 巻 369
2. 論文標題 Arithmetic of abelian varieties with constrained torsion	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2395 ~ 2424
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/6790	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Mohamed Saidi, Akio Tamagawa	4. 巻 310
2. 論文標題 A refined version of Grothendieck's birational anabelian conjecture for curves over finite fields	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 610 ~ 662
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Christopher Rasmussen, Akio Tamagawa	4. 巻 13
2. 論文標題 Abelian surfaces good away from 2	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 991 ~ 1001
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S179304211750052X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Anna Cadoret, Chun-Yin Hui, Akio Tamagawa	4. 巻 186
2. 論文標題 Geometric monodromy --- semisimplicity and maximality	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annals of Mathematics	6. 最初と最後の頁 205 ~ 236
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4007/annals.2017.186.1.5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Anna Cadoret, Akio Tamagawa	4. 巻 152
2. 論文標題 Gonality of abstract modular curves in positive characteristic	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 2405 ~ 2442
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X16007612	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mohamed Saidi, Akio Tamagawa	4. 巻 26
2. 論文標題 Variation of fundamental groups of curves in positive characteristic	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 1 ~ 16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/665	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Anna Cadoret, Akio Tamagawa	4. 巻 2019
2. 論文標題 On the geometric image of $F_l$ -linear representations of etale fundamental groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 2735 ~ 2762
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnx193	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Anna Cadoret, Akio Tamagawa	4. 巻 752
2. 論文標題 Genus of abstract modular curves with level- $l$ structures	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 25 ~ 61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2016-0057	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Christopher Rasmussen, Akio Tamagawa	4. 巻 5
2. 論文標題 Cyclic covers and Ihara's question	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 1 ~ 23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-019-0170-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Mohamed Saidi, Akio Tamagawa	4. 巻 762
2. 論文標題 On the arithmetic of abelian varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 1 ~ 33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2018-0024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akio Tamagawa	4. 巻 767
2. 論文標題 Correspondences on curves in positive characteristic	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 97 ~ 114
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/767/15400	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 玉川安騎男
2. 発表標題 アーベル多様体に関する3つの予想について
3. 学会等名 香川セミナー (於香川大学) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akio Tamagawa
2. 発表標題 Semisimplicity of geometric monodromy on etale cohomology (joint work with Anna Cadoret and Chun Yin Hui)
3. 学会等名 東京北京パリ数論幾何セミナー (於東京大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 玉川安騎男
2. 発表標題 代数多様体の数論的基本群とその線形表現
3. 学会等名 第61回代数数学シンポジウム (於佐賀大学) (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Akio Tamagawa
2. 発表標題 Specialization of $l$ -adic representations of arithmetic fundamental groups and applications to arithmetic of abelian varieties
3. 学会等名 AMS Summer Institute in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Akio Tamagawa
2. 発表標題 Fundamental groups and moduli of curves in positive characteristic
3. 学会等名 Moduli Spaces and Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 玉川安騎男
2. 発表標題 共通同種因子を持つアーベル多様体の族について (Anna Cadoret氏との共同研究)
3. 学会等名 大阪大学整数論保型形式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 玉川安騎男
2. 発表標題 Neukirch-内田の定理の長さ $m$ 可解版について (Mohamed Saidi氏との共同研究)
3. 学会等名 愛知数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 玉川安騎男
2. 発表標題 共通同種因子を持つアーベル多様体の族について (Anna Cadoret氏との共同研究)
3. 学会等名 愛知数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

玉川 安騎男   京都大学数理解析研究所 <a href="https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/tamagawa.html">https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/tamagawa.html</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ラスムッセン クリストファー  (Rasmussen Christopher)		
研究協力者	カドレ アナ  (Cadoret Anna)		
研究協力者	サイディ モハメッド  (Saidi Mohamed)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 副有限モノドロミー，ガロア表現，および複素関数	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Inter-universal Teichmüller Theory Summit 2016	開催年 2016年～2016年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Wesleyan University	Purdue University	University of California, Los Angeles	他1機関
フランス	Ecole Polytechnique	Sorbonne Université		
英国	Exeter University	Nottingham University		
台湾	Academia Sinica	National Tsing Hua University	National Taiwan University	
中国	Tsinghua University	University of Hong Kong		
オランダ	Vrije Universiteit Amsterdam			
ルクセンブルク	University of Luxembourg			