

令和 2 年 6 月 3 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03610

研究課題名(和文) 数論幾何学のアデールの新手法 - p進ホッジ理論・多重L函数を中心とする多角的応用

研究課題名(英文) Adelic new methods on arithmetic geometry and their applications to p-adic Hodge theory and multiple L-functions

研究代表者

安田 正大 (Yasuda, Seidai)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90346065

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,200,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は分担者の山下剛氏と共同でWach加群の族の構成しクリスタリン変形環に応用した。また近藤智氏と共同でDrinfeldモジュラー多様体上のゼータ元を整モデルに持ち上げ、またモノイドの表現と関係するトポスの理論を構築した。また杉山祐介氏と共同でpseudo-tameという概念を導入し、閉体上の任意の代数曲線が射影直線への馴分岐な射を持つことを示した。また高次複シャッフル空間を導入し深さ4の場合にBroadhurst-Kreimer予想の複シャッフル版を示した。また特別な種数2の代数曲線のL関数と関連するヒルベルトモジュラー曲面の適当な商がクヌマー曲面となることを見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上に述べた通り研究成果は多岐にわたっているが、いずれも整数論の当該分野の研究において、超幾何多項式、トポスの理論、pseudo-tame関数の概念、高次複シャッフル空間の考察など、新しい手法を用いて従来であまり進展がなかった方向への結果を得ているという点が画期的である。また、特別な種数2の代数曲線のL関数についての成果は限定的なものであるが、regulator写像とL関数の特殊値の関係の幾何的理解に役立ち、わかっている場合の少ないBeilinson予想の進展に役立つと期待される。

研究成果の概要(英文)：The research representative and Go Yamashita have constructed families of Wach modules of rank two and applied them to the study of crystalline deformation rings of dimension two. He and Satoshi Kondo have constructed lifts of the zeta elements in motivic cohomologies of Drinfeld modular varieties to their integral models satisfying norm relations, and have constructed a theory of topoi related to monoids. He and Yusuke Sugiyama have introduced a new notion of pseudo-tameness and, by using them, have proved that any algebraic curve over an algebraically closed field has a tame morphism to the projective line. He has introduced the derived double shuffle spaces and has applied them to show a double shuffle analogue of Broadhurst-Kreimer conjecture in depth four. He has found that a suitable quotient of a Hilbert modular surface related to the L-function of a certain curve of genus is a Kummer surface.

研究分野：整数論

キーワード：ガロア表現 p進 Hodge 理論 関数体の数論 標数2の代数曲線 多重ゼータ値 トポスの理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

研究開始に先立って研究代表者らは次の 4 つの新しい手法を開発していた: (1) Pade 近似を用いて整係数 p 進 Hodge 理論を研究する手法(研究分担者の山下剛氏との共同開発), (2) 対数クリスタル的手法と奇妙な関係式とを組み合わせる p 進多重ゼータを研究する手法, (3) トポス理論を用いてアデル群の表現と Galois 表現とを同じ枠組みで研究する手法(近藤智氏との共同開発), (4) (,) 加群を用いて p 進 \mathbb{P}^1 を構成することが見込まれる手法(研究代表者との議論を通じて中村健太郎氏が提案). これらはいずれも p 進 Hodge 理論および L 関数の研究に重要な応用をもたらすと見込まれるものであった.

2. 研究の目的

当初の研究目的は, 上に述べた手法 (1)-(4) のもたらす可能性を追求し, すでに得られている未発表の成果も含めて発表すること, および申請者自らが開発した手法ではないが, (5) 導来代数幾何の理論を取り入れた p 進 Hodge 理論の強化, であった. 研究の進展に伴い新たな視点が切り拓かれ, (6) 研究代表者らが近年導入した概念である 標数 2 の pseudo-tame 関数についても, より自然な解釈や他の標数の場合の類似などについてより精密な研究を行う, (7) 高次複シャッフル関係式や Steinberg 加群などの概念を用い, 一般複シャッフル関係式から他の関係式系が導けるかという問題に挑戦する, (8) Fermat 曲線に付随するモチーフと Hilbert モジュラー多様体との間の代数的対応の具体化を試みる, の 1 3 つが途中から新たな研究の目的として加わった.

3. 研究の方法

(1) については, 非常に複雑な場合分けに基づいていた手法を整理・改良し, 議論の透明化を図ることにより手法の適用範囲を広げることを試みる, 蓄積されたデータをもとに Fontaine-Laffaille 理論の適用範囲を広げる形に拡張することを試みる, ガロア表現の保型性持ち上げへの応用を見越し表現の還元だけでなく局所変形環の精密な情報が計算できるように手法を精密化する, という研究を行った. (2), (4) については, 新しい視点が拓けたこともあり残念ながら期間内に本格的に研究に取り込む余裕がなかった. (3) については, 適当な条件を満たすサイトの公理系を考案し, またその公理をみたす実例をいろいろと考察することにより研究を行い, また研究成果を Drinfeld モジュラー多様体に应用するために必要となる Drinfeld モジュラー多様体の構造を研究した. (5) については, 多くの時間を確保し無限圏の理論の基礎及び応用についての知識習得につとめた. (6) については, pseudo-tame 関数の概念を定義し基本性質を調べることにより, 射影直線への tame な射の存在という未解決予想に取り組んだ. (7) については, Goncharov の手法を理解し, ホモロジー代数やグラフの圏の局所化の観点を新たに導入することにより研究を行った. (8) については, 関連する幾つかの具体的な $K3$ 曲面を詳細に調べることにより研究を行った.

4. 研究成果

(1) について研究代表者は, 本研究開始前に行った計算結果の検証を精密に行い, Hodge Tate 重さの差が $(p^2+1)/2$ 以下の場合についての計算を完成させ, 多くの場合分けに頼っていた手法を改良して見通しの良いものにした. さらに構成した階数 2 の Wach 加群の族についての計算を精密化し, クリスタリン表現の法 p 還元だけでなく, 整格子がどのくらいたくさんあるか, および, 還元の拡大類の同型類の決定を多くの場合に行った. 精密化して得られた結果を用いて, 2 次元法 p ガロア表現のクリスタリン変形環の既約成分をいくつかの場合に決定した. (2) については, 形式的反復積分の概念との関連させて議論を分かりやすくしたり, 現れる \log スキームを簡単なものにするなど議論にいくつかの改良を行った. (3) について研究代表者の安田は, 近藤智氏と共同研究を行い, Drinfeld modular 多様体のモチヴィックコホモロジー上に以前構成していた Euler 系と同じ norm 関係式をみたす元の族を Drinfeld レベル付きの Drinfeld modular 多様体に拡張する仕事に取組み完成させた. またそれを実現するためにモノイドの表現と関係するトポスについての理論を構築した. また近藤智氏と共同でアデル群の GL と関係する Y サイトを用いて Euler 系のノルム関係式を導けることについてプレプリントにまとめた. この執筆の途中で, 古典群やスキーム, 対称リーマン空間と関係するサイトの考察を精密に行った. また, 近藤智氏との共同研究により関数体上の GL_n に関する modular symbol が Borel-Moore ホモロジーを生成するという代数体では知られている事実の関数体類似が成り立つことに気づき, このことについての論文を執筆中である. (4) については, 時間的な余裕がなく, 残念ながら本格的な研究に取り組むことができなかった. (5) については, 残念ながら期間中にまとまった成果が得られなかったが, 無限圏の理論の基礎及び応用についての知識習得や情報収集を行い, 今後の研究に取り組む準備が整えることは

できた.

(6) について研究代表者は杉山祐介氏との共同研究により, pseudo-tame な関数という概念を用い, cubing という手法を開発して代数閉体上の任意の代数曲線から射影直線へのいたるところ馴分岐となる射が存在することを示した. 応用として, Belyi の定理の正標数類似が基礎体の標数が 2 のときにも奇標数の場合と同様に成立することを示した.

(7) について研究代表者は, 分担者の山下剛氏および逆井卓也氏と副代数的 Grothendieck-Teichmüller 群と operad によって定式化される Kontsevich のグラフ複体の関係, 柏原-Virgine 問題との関係を勉強した. 研究代表者はそれに触発され, いろいろな可換群スキームに対する複シャッフル空間の構造をホモロジー代数や tree を用いて組織的に研究した. 特に群が乗法群のとき, 複シャッフル空間が深さ 1 で自由に生成されること, および, 乗法群の 2 つ直積のときには深さ 1 では生成されないことを示し, そこから深さが小さい多重ゼータ値に関する伊原・高尾, Schneps, Goncharov, Gangl・金子・Zagier, 井原・落合らによるいくつかの知られている結果の別証明を得た. 関連して Goncharov が導入した modular 複体についての考察を行った. Goncharov は modular 複体を完全錐分割と関連付けているが, Steinberg 加群との関係を予想するほうが自然なのではないかと思いついた. この予想を認めて, 高次複シャッフル空間の概念を導入し考察を進め, 高次複シャッフル空間の次元の交代和を計算した. また深さ 4 の場合に Broadhurst-Kreimer の予想の複シャッフル類似が正しいことを確かめた. また, 複シャッフル関係式と整数係数の一般線形群の関係についての Goncharov の研究をグラフ構成の視点から見直し, 証明の省略されている Goncharov の議論の解明を行った.

(8) について研究代表者は 5 次 Fermat 曲線の商となる特別な種数 2 の代数曲線 C の Hasse-Weil L 関数について調べ, 関連する Hilbert モジュラー曲面の適当な商がアーベル曲面に付随する Kummer 曲面となることを見出した. このアーベル曲面は C のヤコビ多様体と同種であり regulator 写像と L 関数の特殊値の関係の幾何的理解に役立つと期待される.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yusuke Sugiyama, Seidai Yasuda	4. 巻 156
2. 論文標題 Belyi's theoerm in characteristic two	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 325-339
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/S0010437X19007723	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Kondo, Seidai Yasuda	4. 巻 304
2. 論文標題 Regularity of quotients of Drinfeld modular schemes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 481-503
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2020.304.481	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Kondo, Seidai Yasuda	4. 巻 68, no. 5
2. 論文標題 First and second K-groups of an elliptic curve over a global field of positive characteristic	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 2005-2067
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/aif.3202	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Kondo, Seidai Yasuda	4. 巻 502
2. 論文標題 Sites whose topoi are the smooth representations of locally prodiscrete monoids	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 382-496
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j/algebra.2018.01.033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, Seidai Yasuda	4. 巻 286
2. 論文標題 The radius of convergence of the p-adic sigma function	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 751-781
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-016-1783-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Seidai Yasuda	4. 巻 12
2. 論文標題 Finite real multiple zeta values generate the whole space Z	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 787-812
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793042116500512	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Kondo, Seidai Yasuda	4. 巻 20
2. 論文標題 On two higher Chow groups of schemes over a finite field	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Documenta Mathematica	6. 最初と最後の頁 737-752
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計23件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Integral structures of two dimensional crystalline representations
3. 学会等名 p-adic methods in arithmetic geometry at Sendai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Cotangent complex and Postnikov towers
3. 学会等名 Yatsugatake Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Depth graded structures
3. 学会等名 Multiple zeta values and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 安田 正大
2. 発表標題 重さ $(p^2+1)/2$ 以下の 2 次元クリスタリン表現の整構造
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 安田 正大
2. 発表標題 Modular complexes and dimensions of derived double shuffle modules
3. 学会等名 第17回北陸数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 A product of Eisenstein series and special L-values over the rational function field
3. 学会等名 NTCS Seminar on Number Theory (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Derived double shuffle Lie algebra and the Steinberg modules
3. 学会等名 NTCS Seminar on Number Theory (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Foliations I, II
3. 学会等名 ハケ岳ワークショップ, 2018 The conservative conjecture (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 安田 正大
2. 発表標題 「 p 進多重ゼータ値」から「有限多重ゼータ値」へ
3. 学会等名 第26回整数論サマースクール「多重ゼータ値」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Go Yamashita
2. 発表標題 Reductions of Crystalline Representations and Hypergeometric Polynomials
3. 学会等名 Pan Asia Number Theory Conference 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Linearized and derived double shuffle Lie algebras
3. 学会等名 Workshop: Johnson homomorphisms and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 安田正大
2. 発表標題 Drinfeld modular 多様体上の zeta 元について
3. 学会等名 九大数理談話会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 安田正大
2. 発表標題 結合子と結合子関係式
3. 学会等名 第26回整数論サマースクール勉強会「モチヴィック多重ゼータ値」
4. 発表年 2017年

1 . 発表者名 Seidai Yasuda
2 . 発表標題 Etale theta functions, mono-theta environments, and [UTchI] §1 - §3 I, II
3 . 学会等名 Inter-universal Teichmuller Theory Summit 2016 (招待講演) (国際学会)
4 . 発表年 2016年

1 . 発表者名 Seidai Yasuda
2 . 発表標題 Belyi's theorem in characteristic two
3 . 学会等名 p-adic methods in arithmetic geometry at Sendai, 2016 (招待講演)
4 . 発表年 2016年

1 . 発表者名 Seidai Yasuda
2 . 発表標題 Ihara bracket for group schemes
3 . 学会等名 Low dimensional topology and number theory IX (招待講演)
4 . 発表年 2017年

1 . 発表者名 Seidai Yasuda
2 . 発表標題 pseudo-tame rational functions on curves in characteristic two
3 . 学会等名 Weekly Seminar of the Laboratory of Algebraic Geometry and its Applications (招待講演)
4 . 発表年 2017年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Topics on multiple zeta values
3. 学会等名 NCTS Number Theory Seminar (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 安田 正大
2. 発表標題 モチフィック多重ゼータ値と有限多重ゼータ値
3. 学会等名 日本数学会 2015年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Motivic and finite multiple zeta values
3. 学会等名 Bousfield localizations form a set: a workshop in memory of Tetsusuke Ohkawa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 安田 正大
2. 発表標題 階数 2 の Wach加群の族の構成
3. 学会等名 九大代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 安田 正大
2. 発表標題 Grids and the associated monoids
3. 学会等名 上智大学数学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Seidai Yasuda
2. 発表標題 Integrality of p-adic multiple zeta values and application to finite multiple zeta values
3. 学会等名 東京北京パリ数論幾何セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	古庄 英和 (Furusho Hidekazu) (60377976)	名古屋大学・多元数理科学研究科・教授 (13901)	
研究分担者	山下 剛 (Yamashita Go) (70444453)	京都大学・数理解析研究所・講師 (14301)	
研究分担者	岩成 勇 (Iwanari Isamu) (70532547)	東北大学・理学研究科・准教授 (11301)	

