

令和元年6月10日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15H03615

研究課題名(和文)幾何学的特異点論の展開と応用

研究課題名(英文) Developments and applications of geometric singularity theory

研究代表者

石川 剛郎 (Goo, Ishikawa)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：50176161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,400,000円

研究成果の概要(和文)：対称性をもつ空間において自然に現れる方程式の幾何学的解を、幾何構造に付随し必然的に現れる特異性に着目し、幾何学的動機付けのもとで特異性を解析・分類すると共に、その幾何学的意味を明らかにし、幾何学における新たな方法を提示・応用することを目的とした研究である。本研究によって、極めて一般的な設定で接線曲面の特異性のジェネリックな分類を完成させ、また、3次元ローレンツ多様体のナル曲線が作る接線曲面の特異性をエンゲル擬積構造、射影接触構造、3階常微分方程式の幾何学的理論と結び付け、特異性の分類を極めて一般的に達成した。また、 $(2,3,5)$ 分布のG2双対性の一般的枠組みを解明することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究により、特異点の特徴付けを応用することで、一般空間の空間曲線や不定値計量空間のナル曲線の接線曲面の特異性が、空間の幾何構造を変化させても安定に出現すること、すなわち特異点分類のロバスト(robust, 鈍感)性を証明することができた。この成果は、様々な幾何構造に関して、クライン幾何学における特異点の分類結果に基づいて、特異性の出現・分類が幾何構造の変形に関してロバスト性を持つかどうかを検証する道を作り、幾何学全般に対して新たな問題提起を促し、幾何構造の特性、幾何構造の間の関係性を改めて問い直す機会も与える。したがって、本研究は人類の空間認識に関する本質的な学術的寄与をしたと考えられる。

研究成果の概要(英文)：In a space with symmetry, we study the geometric solutions of naturally appeared equations, regarding the characteristic singularities associated to the geometric structure. Under geometric motivations, we analyse and classify singularities and clarify their geometric meanings. Thus we present new methods in geometry and apply them. By this project, we have completed the generic classification of singularities in tangent surfaces under a far general framework. Moreover we have established the classification of tangent surfaces to null curves in any 3-dimensional Lorentz manifold, relating Engel pseudo-product structures, projective contact structures and the geometric theory of third order OED. Furthermore we have succeeded the clarification of the general framework on the G2 duality of $(2,3,5)$ -distributions.

研究分野：特異点論，実代数幾何，トポロジー，幾何学的制御理論

キーワード：フロントラル ラグランジュ錐構造 接線曲面 特異点の安定性 特異点のロバスト性 開化 分岐加群 $(2,3,5)$ 分布

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) **制御変分問題の特異性**: Carnot-Caratheodory 距離に関する測地線には2種類ある: 正常測地線と異常測地線である. 異常測地線は終点写像の特異性により記述される. 異常測地線は, sub-Riemann 幾何学を含めた様々な場面で避けて通れない重要な対象である.

(2) **錐構造・共形構造のヌル曲線・ヌル曲面の特異性**: 広い意味の微分式系と捉えられる制御系として, Minkowski-Lorentz 多様体や semi-Riemann 多様体上の不定値計量のヌル・ベクトルからなる錐が定まる. また, 微分式系の特異軌道の研究に関連して, 錐構造が自然に現れることもわかっている. これらの制御系を広い意味での微分式系と捉え, 変分解析・最適制御問題における特異性を制御理論の観点から解析することは自然な問題となる.

2. 研究の目的

(1) 本研究課題では, 対称性をもつ幾何構造という空間概念において自然に現れる方程式の幾何学的解を, 特異性に注目して研究する. **幾何構造に付随して必然的に現れる特異性**に着目し, 幾何学的動機付けのもとで特異性の解析・分類をすると共に, その幾何学的意味を明らかにし, 幾何学の新たな方法を提示・応用することを目的とする.

(2) 具体的な研究目標として, 特異微分式系, 非線形制御系に関わる **微分方程式の対称性と幾何学的解の特異性の分類**を行い, 制御系の変分問題に基づく拘束ハミルトン系, ポート・ハミルトン系に現れる特異性の解明をし, 凸 サブ・フィンラー計量と錐構造に関する距離と測地線の対称性・特異性の研究を行う.

3. 研究の方法

(1) 研究の数学的な方法は**写像の特異点論**と**実代数幾何**である. 研究代表者が専門としている写像の特異点論, 実代数幾何は, 主に有限次元多様体間の可微分写像を対象としている. 本研究課題は, 完全非可積分微分式系の軌道空間や広い意味の微分式系の解空間を写像空間として捉え, その特異性を, 高度な解析的手法を取り入れて組織的に究明する方法を確立する. 制御理論は, その重要性・実用性から, 特殊な汎用性のない経験則が支配することも多い世界である. 一方, 特異点は, 基礎理論さえ確立しておけば, 逆に正則なものよりも捉えやすい対象であり, その特異点を調べることにより, そのシステムの本来の特性が理解され, システムの全体像を描くことができる. 特異性の現れるパターンを分類し, 写像解空間の特異点に関する基礎理論, 普遍的な指導原理を確立する.

(2) 本研究課題では「非線形変分解析という方法」と「非線形制御系・微分式系という対象」を, 関連研究者との交流の基盤・横軸として置き, 「非線形制御系, 特異微分式系に関わる具体的な偏微分方程式の解析」「制御系の変分問題に基づく port-Hamilton 系の特異性の解明」「離散凸 sub-Finsler 計量と錐構造に関する測地線と球面の特異点の解明」を目標として課題解決を行なった.

4. 研究成果

(1) 研究分担者および連携研究者などと協力して, 研究代表者によるマルセイユ, リュミニエール大学で開催された実特異点と応用の研究集会における講演 (You Tube に講演ビデオ (Go Ishikawa: Singularities of tangent surfaces and generalised frontal) がアップされている) の成果を精密化, 一般化することに成功した. また, 平成27年9月には, ワルシャワで開催された Geometric Singularity Theory 研究集会において, ライプニッツ複雑性に関する講演を行い, 研究交流を行った. さらに, 翌年の3月に, 沼津研究会において講演を行い, さらに中央大学で開催された Encounter with Mathematics において 特異点論に関する一般講演「特異点論の地図」を行い, 研究課題に関する社会的発信を行った.

(2) 3次元ローレンツ多様体のヌル曲線の接線曲面の特異点の分類を行った. この研究は, 3階常微分方程式の分類問題と関係付けられ, 3次元接触多様体におけるルジャンドル曲線の接線曲面の特異性との双対性として捉えることができる. その結果, 特異点の分類が, 3次元ローレンツ多様体にとどまらず, 非退化2次元錐構造が付与された3次元多様体に対して成り立つことを発見することができた. 平成28年9月にスペインのマラガでのローレンツ幾何学研究会において成果発表を行った.

(3) 平成29年にメキシコでのジェネリック幾何における特異点に関する国際研究集会に参加・講演し, 世界の幾何学的特異点論研究者と情報交換を行い, 極めて一般的状況の下, 一般次元において接線曲面の特異性の分類を完成させ国際的学術雑誌に成果を発表した. また平成29年度までの課題研究の成果をまとめてフロンタル, 開化, 分岐加群の一般論を展開した. さらに, G_2 幾何における双対性を一般化することに成功している.

(4) 平成30年6月に広島工業大学の特異点研究会に出席し, 特異点と実代数幾何, 特異点の実形に関する研究連絡を行い, 7月にブラジルにおいて開催された「15th International Workshop

on Real and Complex Singularities 2018」に参加・講演し、フロントル特異性に関する情報交換・成果発表を行った。平成30年(2018年)12月には、京都大学数理解析研究所の特異点論研究会に参加・講演し、研究課題を通して発見された新たな概念である「コフロントル」に関する成果発表を行った。その他、研究代表者は、分担者、連携研究者は代表者と綿密に連携し、分担金に基づいて研究課題の解決・推進のための共同研究、成果発表、および広報活動を継続して実施した。課題解決の過程で、共著論文 Goo Ishikawa, Yumiko Kitagawa, Asahi Tsuchida, Wataru Yukuno, Duality of $(2,3,5)$ -distributions and Lagrangian cone structures, を完成させ、現在、国際的学術雑誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

(雑誌論文)(計45件)

Goo Ishikawa, Cofrontals, to appear in the Proceedings of Australian-Japanese Real and Complex Singularities Workshop VII, (accepted on 28 Jan. 2019). 出版確定, 査読有

Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Leibniz complexity of Nash functions on differentiations, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan (JMSJ), (accepted on 10 March 2018). 出版確定, 査読有

K. Saji, A. Tsuchida, A note on singular points of bundle homomorphisms from a tangent distribution into a vector bundle of the same rank. Rocky Mountain J. Math. 49 (2019), no. 1, 335-354. 査読有 DOI: 10.1216/RMJ-2019-49-1-335

S. Honda, M. Takahashi, Evolutes and focal surfaces of framed immersions in the Euclidean space. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. (2019), 1--20. 査読有 DOI: 10.1017/prm.2018.84

M. Takahashi, Envelopes of families of Legendre mappings in the unit tangent bundle over the Euclidean space. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 473 (2019) 408--420. 査読有 DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.12.057

Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Singularities of tangent surfaces to directed curves, Topology and its Applications, 234 (2018), 198--208.
<https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.11.018> 査読有

Goo Ishikawa, Singularities of frontals, in "Singularities in Generic Geometry", Advanced Studies in Pure Mathematics, vol.78, Math. Soc. Japan, pp.55-106, (2018). 査読有

J.L. Deolindo-Silva, Y. Kabata, T. Ohmoto, Binary differential equations at parabolic and umbilical points for 2-parameter families of surfaces. Topology Appl. 234 (2018), 457-473. 査読有

L. Martins, K. Saji, Geometry of cuspidal edges with boundary, Topology Appl. 234 (2018), 209--219, 国際共同研究, 査読有 DOI: 10.1016/j.topol.2017.11.024

A. Honda, M. Koiso, K. Saji, Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space, Hokkaido Math. J. 47 (2018), no. 2, 245--267. 査読有

¹¹ K. Saji, Normal form of the swallowtail and its applications, Internat. J. Math. 29 (2018), no. 7, 1850046, 17 pp. 査読有 DOI: 10.1142/S0129167X18500465

¹² R. Oset Sinha, K. Saji, On the geometry of folded cuspidal edges, Rev. Mat. Complut. 31 (2018), no. 3, 627--650. 国際共同研究, 査読有 DOI: 10.1007/s13163-018-0257-6

¹³ S. Izumiya, M.C. Romero-Fuster, M. Takahashi, Evolutes of curves in the Lorentz-Minkowski plane. Advanced Studies in Pure Mathematics. 78 (2018), 313--330. 国際共同研究, 査読有 DOI:10.2969/aspm/07810313

¹⁴ T. Fukunaga, M. Takahashi, Framed surfaces in the Euclidean space. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series. 50 (2018) no.1, 37--65. 査読有 DOI:10.1007/s00574-018-0090-z

¹⁵ Y. Li, D. Pei, M. Takahashi, H. Yu, Envelopes of Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere. The Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 69 (2018), 631--653. 国際共同研究, 査読有 DOI:10.1093/qmath/hax056

¹⁶ Y. Mitsumatsu, Leafwise symplectic structures on Lawson's foliation. J. Symplectic Geom. 16--3 (2018), 817-838. 査読有

¹⁷ S. Saito, Discriminant quadratic forms and their applications to the classifications of real $K3$ surfaces, 北海道教育大学紀要 69 巻 1 号, 9--20, 2018 年 8 月. 査読無

¹⁸ 齋藤幸子, Kharlamov によるいくつかの位相型の実 4 次曲面の存在証明, 北海道教育大学紀要 68 巻 2 号, 11-20, 2018 年 2 月. 査読無

¹⁹ Goo Ishikawa, Stanislaw Janeczko, Residual Algebraic Restrictions of Differential Forms, Methods and Applications of Analysis, vol. 24, No. 1 (March 2017), 045--062. 国際共同研究, 査読有

²⁰ Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Singularities of tangent surfaces to generic space curves, Journal of Geometry, vol.108 (2017), 301--318. 査読有
doi:10.1007/s00022-016-0341-3

- 21 H. Sano, Y. Kabata, J.L. Yeolindo Silva, T. Ohmoto, Classification of jets of surfaces in projective 3-space via central projection. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 48 (2017), no. 4, 623-639. 査読有
- 22 T. Sasajima, T. Ohmoto, Classical formulae on projective surfaces and 3-folds with ordinary singularities, revisited. *Saitama Math. J.* 31 (2017), 141-159. 査読有
- 23 T. Ohmoto, M. Shiota, C1-triangulations of semialgebraic sets. *J. Topol.* 10 (2017), no. 3, 765-775. 査読有
- 24 S. Izumiya, K. Saji, N. Takeuchi, Flat surfaces along cuspidal edges, *J. Singul.* 16 (2017), 73--100. 査読有 DOI: 10.5427/jsing.2017.16c
- 25 T. Fukunaga, M. Takahashi, Existence conditions of framed curves for smooth curves. *Journal of Geometry.* Vol. 108 (2017), 763--774. 査読有 DOI:10.1007/s00022-017-0371-5
- 26 M. Takahashi, Envelopes of Legendre curves in the unit tangent bundle over the Euclidean plane. *Results in Mathematics.* Vol. 71 (2017), 1473--1489. 査読有 DOI:10.1007/s00025-016-0619-7
- 27 Y. Mitsumatsu, E. Vogt, Thurston's h-principle for 2-dimensional foliations of codimension greater than one. *Geometry, dynamics, and foliations 2013*, 181-209, *Adv. Stud. Pure Math.*, 72, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017. 国際共同研究, 査読有
- 28 S.V. Sabau, K. Shibuya, R. Yoshikawa, Geodesics on strong Kropina manifolds. *Eur. J. Math.* 3 (2017), no. 4, 1172-1224. 査読有
- 29 Sachiko Saito, On real anti-bicanonical curves with one double point on the 4-th real Hirzebruch surface. II, 北海道教育大学紀要 68 巻 1 号, 1--9, 2017 年 8 月. 査読無
- 30 Sachiko Saito, Itenberg's arguments for the rigid isotopic classification of real curves of degree 6 with one real nondegenerate double point, 北海道教育大学紀要 67 巻 2 号, 1-9, 2017 年 2 月. 査読無
- 31 G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Singularities of tangent surfaces in Cartan's split G₂-geometry, *Asian Journal of Mathematics*, vol.20--2, (2016), 353--382. 査読有 DOI: 10.4310/AJM.2016.v20.n2.a6
- 32 G. Ishikawa, Y. Machida and M. Takahashi, D_n-geometry and singularities of tangent surfaces. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu.* B55 (2016), 67--87. 査読有
- 33 T. Yoshida, Y. Kabata, T. Ohmoto, Bifurcation of plane-to-plane map-germs with corank two of parabolic type. *Theory of singularities of smooth mappings and around it*, 239-258, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B55, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2016. 査読有
- 34 T. Ohmoto, Singularities of maps and characteristic classes. *School on real and complex singularities in São Carlos*, 2012, 191-265, *Adv. Stud. Pure Math.*, 68, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016. 査読有
- 35 L. F. Martins, K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges, *Canadian J. Math.* 68 (2016), 445-462. 国際共同研究, 査読有 DOI: 10.4153/CJM-2015-011-5
- 36 M. Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes. *Contemporary Mathematics.* Vol. 675 (2016), 337--355. 査読有 DOI: 10.1090/conm/675/13600
- 37 S. Honda, M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space. *Advances in Geometry.* Vol. 16 (2016), 265--276. 査読有 DOI: 10.1515/advgeom-2015-0035
- 38 T. Fukunaga, M. Takahashi, On convexity of simple closed frontals. *Kodai Mathematical Journal.* Vol. 39 (2016), 389--398. 査読有 DOI: 10.2996/kmj/1467830145
- 39 L. Chen, M. Takahashi, Dualities and evolutes of fronts in hyperbolic 2-space and de Sitter 2-space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* Vol. 437 (2016), 133--159. 国際共同研究, 査読有 DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.12.029
- 40 S.V. Sabau, K. Shibuya, A variational problem for curves on Finsler surfaces. *J. Aust. Math. Soc.* 101 (2016), no. 3, 418-430. 査読有
- 41 Goo Ishikawa, Classification problems on singularities of mappings and their applications, *Sugaku Exposition*, Volume 28--2 (2015), 189--214. 査読有
- 42 Goo Ishikawa, Yoshinori Machida, Monge-Ampere systems with Lagrangian pair, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 11 (2015), 081, 32 pages. <https://www.emis.de/journals/SIGMA/2015/> 査読有
- 43 G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Geometry of D₄ conformal triality and singularities of tangent surfaces, in *Proc. of Singularities in Geometry and Appl. III*, Edinburgh, Scotland, 2013, *Journal of Singularities*, vol. 12 (2015), 27--52. DOI: 10.5427/jsing.2015.12c 査読有
- 44 G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, Duality on geodesics of Cartan distributions and sub-Riemannian pseudo-product structures, *Demonstratio Mathematica.* vol. 48-2 (2015, May) 193--216. 査読有
- 45 S. Saito, On real anti-bicanonical curves with one double point on the 4-th real Hirzebruch surface. *J. Singul.* 11 (2015), 1-32. 査読有

[学会発表] (計 10 件)

Goo Ishikawa, Leibniz complexity of Nash functions on differentiations, September 13th 2018. Real Algebraic Geometry and Singularity Theory Symposium (Memorial Conference of Masahiro Shiota), Hyokyo Hall, Kobe Information Culture Building 3F Kobe Harborland Campus of Hyogo University of Teacher Education.

Goo Ishikawa, Topics on frontal singularities, 26 July 2018, 15th International Workshop on Real and Complex Singularities, Sao Carlos, Brazil.

Goo Ishikawa, Contact structures, Lagrangian cone structures and $(2,3,5)$ -distributions, July 7th 2018, North Kyushu Geometry Workshop 2018, Tobata Campus, Kyushu Institute of Technology, Kokura.

Goo Ishikawa, Duality of $(2,3,5)$ -distributions and Lagrangian cone structures, March 7th 2018, (Numazu-)Shizuoka workshop --- Geometry, Mathematical Physics and Quantum Theory, Shizuoka University.

Goo Ishikawa, Duality of $(2,3,5)$ -distributions and Lagrangian cone structures, January 26th 2018, Contact structure, Singularities, Differential equations and related area, Satellite Plaza of Kanazawa University, Kanazawa, Japan.

Goo Ishikawa, Stability of parametric Lagrangian and Legendrian varieties, December 13 (2017). International Conference on Singularity Theory and Dynamical Systems| in Memory of John Mather, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University 三亜, 海南島, 中国.

Goo Ishikawa, Stability of Frontal Singularities, RIMS Kyoto, JAPAN, 28 November 2017. RIMS 共同研究(公開型) 可微分写像の特異点論の局所的研究と大域的研究 京都大学数理解析研究所.

Goo Ishikawa, Duality-singularity of indefinite metrics and contact structures, 1 August 2017, Singularities in Generic Geometry and its Applications: Valencia V, Facultad de Ciencias, UNAM, Mexico City.

Goo Ishikawa, Duality of $(2,3,5)$ -distributions and Lagrangian cone structures, July 16 2017, The memorial workshop for the retirement of Professor Keizo Yamaguchi, Kobe University, Kobe, Japan.

Goo Ishikawa, Recognition Problem of Frontal Singularities, June 1 2017, Applications of Differential Geometry and Singularity Theory, Iwate Medical University, Morioka, Japan.

[図書] (計 1 件)

Goo Ishikawa, Singularities of Curves and Surfaces in Various Geometric Problems, CAS Lecture Notes 10, Exact Sciences, (2015), 94 pages.

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/jishikawa.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：大本 亨

ローマ字氏名：Toru Ohmoto

所属研究機関名：北海道大学

部局名：理学研究院

職名：教授

研究者番号(8桁)：20264400

研究分担者氏名：佐治 健太郎

ローマ字氏名 : Kentaro Saji
所属研究機関名 : 神戸大学
部局名 : 理学部
職名 : 准教授
研究者番号 (8 桁) : 70451432

研究分担者氏名 : 高橋 雅朋
ローマ字氏名 : Masatomo Takahashi
所属研究機関名 : 室蘭工業大学
部局名 : 工学部
職名 : 准教授
研究者番号 (8 桁) : 80431302

研究分担者氏名 : 澁谷 一博
ローマ字氏名 : Kazuhiro Shibuya
所属研究機関名 : 広島大学
部局名 : 理学研究科
職名 : 准教授
研究者番号 (8 桁) : 00569832

研究分担者氏名 : 三松 佳彦
ローマ字氏名 : Yoshihiko Mitsumatsu
所属研究機関名 : 中央大学
部局名 : 理工学部
職名 : 教授
研究者番号 (8 桁) : 70190725

研究分担者氏名 : 斎藤 幸子
ローマ字氏名 : Sachiko Saito
所属研究機関名 : 北海道教育大学
部局名 : 教育学部
職名 : 准教授
研究者番号 (8 桁) : 40260400

(2)研究協力者

研究協力者氏名 : 待田 芳徳
ローマ字氏名 : Yoshinori Machida
研究協力者氏名 : 北川 友美子
ローマ字氏名 : Yumiko Kitagawa
研究協力者氏名 : Stanislaw Janeczko
ローマ字氏名 : Stanislaw Janeczko

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。