

平成 30 年 5 月 28 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15H03617

研究課題名(和文) リー双代数によるリーマン面の位相幾何学的研究

研究課題名(英文) Topological studies on Riemann surfaces through Lie bialgebras

研究代表者

河澄 響矢 (Kawazumi, Nariya)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30214646

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,100,000円

研究成果の概要(和文)：任意の向きづけられた連結コンパクト曲面について、曲面の基本群の生成系と接束のフレーミングを適切に固定した場合に、対応する柏原ヴェルニユ問題を定式化し、正則ホモトピー版のトゥラエフ余括弧積が形式表示をもつことを証明した。とくに、正則ホモトピートゥラエフ余括弧積に由来するジョンソン準同型像の制約条件は榎本佐藤トレースによるものと同値である。翻って、群状展開がゴールドマン括弧積の形式表示を与えるならば、それは特殊・斜交展開の共役となることを証明した。以上は A. Alekseev, F. Naef および連携研究者久野および代表者河澄の共同研究による。

研究成果の概要(英文)：For any compact connected oriented surface, we formulated a Kashiwara-Vergne problem associated with a fixed marking of the fundamental group and a fixed framing of the tangent bundle, and proved that the framed Turaev cobracket has a formal description. In particular, the constraint of the Johnson image coming from the framed Turaev cobracket equals that of the Enomoto-Satoh trace. On the other hand, any group-like expansion inducing the formal description of the Goldman bracket is conjugate to a special/symplectic expansion. These results are joint works with A. Alekseev, F. Naef, a collaborator Y. Kuno and the principal investigator N. Kawazumi.

研究分野：位相幾何学

キーワード：トポロジー リーマン面 ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数 柏原ヴェルニユ問題 ゴールドマン括弧積 フレーミング 写像類群 ジョンソン準同型

## 1. 研究開始当初の背景

曲面のゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の形式表示は、それ自体が興味深い問題であるが、同時に、写像類群のジョンソン準同型像の記述問題に深く関連しており、曲面のトポロジー全体に深く関連している。ゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の2つの演算つまりゴールドマン括弧積とトゥラエフ余括弧積について、前者のゴールドマン括弧積については本研究開始以前に充分条件が分かっていた。つまり、曲面の境界成分数が1の場合には連携研究者久野雄介と代表者河澄によって斜交展開が形式表示を与えることが示され、境界成分数が2以上の場合も久野・河澄と G. Massuyeau-V. Turaev が独立に斜交/特殊展開によってゴールドマン括弧積が形式表示されることが示されていた。他方、久野・河澄が示したようにトゥラエフ余括弧積はジョンソン準同型像上で消滅する。つまり、ジョンソン準同型像の記述問題に深く関連するのはトゥラエフ余括弧積であるが、こちらの形式表示の存在は研究開始当初全く不明であった。また、正則ホモトピー版に修正することでトゥラエフ余括弧積のテンソル表示の主要項に、種数0の場合には柏原ヴェルニュ問題の Alekseev-Torossian 発散コサイクルが現れ、連結成分数1の場合には(ジョンソン準同型像の外側にある)榎本佐藤トレースが現れることが河澄によって明らかになっていた。代表者の一貫した研究テーマとして、リーマン面の文脈で現れるさまざまな無限次元リー代数の代数構造の解明は重要な課題である。標語的に言えば「写像類群の『リー代数』を解明する」ということである。

## 2. 研究の目的

- (1) 柏原ヴェルニュ問題との関連を見据えつつ、トゥラエフ余括弧積の形式表示の存在問題を解決すること。
- (2) 形式表示が否定的な場合、トゥラエフ余括弧積からジョンソン準同型像の新しい制約条件を見出すこと。
- (3) 曲面のトポロジーに関して、(1)(2)に付随する諸問題を解くこと。

## 3. 研究の方法

当初は種数0の場合に直接計算でトゥラエフ余括弧積を表示しようとした。その試みが雑誌論文であるが、その先の展望はひらけなかった。柏原ヴェルニュ問題の専門家である A. Alekseev 氏(ジュネーブ大学)と F. Naef 氏(ジュネーブ大学 MIT)との共同研究の開始とともに局面が大きく展開した。彼らの非可換ポアソン幾何学的手法と我々

の代数的手法を結びつけることで(1)が肯定的に解決した。つまり(2)は問題として成立しなくなった。また、付随して幾つかの成果が得られた。

同時に、リーマン面という様々な分野に深く関連する研究対象を主題としているため、リーマン面に関連する最新の研究動向について手広く情報収集を行った。なお、リーマン面の位相幾何学の専門家を1名特任研究員として雇用した。

## 4. 研究成果

(i) A. Alekseev 氏, F. Naef 氏, 久野および河澄の共同研究。柏原ヴェルニュ問題の解が種数0のトゥラエフ余括弧積の形式表示を与えることを証明した(雑誌論文)。種数0トゥラエフ余括弧積の形式表示の存在については G. Massuyeau が他の手法であるコンツェヴィチ積分を用いて証明していた。我々はさらに、トゥラエフ余括弧積の形式表示を与える特殊展開は柏原ヴェルニュ問題の解に限ることも証明した。このことが正種数の場合の柏原ヴェルニュ問題の定式化に繋がった(雑誌論文)。任意の向きづけられた連結コンパクト曲面について、曲面の基本群の生成系と接束のフレーミングを適切に固定した場合に、対応する柏原ヴェルニュ問題を定式化し、正則ホモトピー版のトゥラエフ余括弧積が形式表示をもつことを証明した。とくに、正則ホモトピー版のトゥラエフ余括弧積に由来するジョンソン準同型像の制約条件は榎本佐藤トレースによるものと同値である。翻って、群状展開がゴールドマン括弧積の形式表示を与えるならば、それは特殊・斜交展開の共役となることを証明した。以上により、柏原ヴェルニュ問題は、曲面のゴールドマン・トゥラエフ・リー双代数の形式表示の問題と一体のものであることが完全に明らかになった。

(ii) 福原真二氏(津田塾大名誉教授)および久野との共同研究。曲面上の基点つき単純閉曲線の対数におけるトゥラエフ余加群構造射の値にベルヌーイ数が現れることを証明し、同時にベルヌーイ数に関する Kronecker 関係式の一般化を定式化し証明した(雑誌論文)。

(iii) 空でない境界をもつ向きづけられた連結コンパクト曲面について framing のホモトピー集合における写像類群作用の軌道集合を計算した(雑誌論文)。種数1の場合には新しい不変量を導入する必要があった。

なお、本科研費が主催または共催した研究集会は以下の通り(計8件)。

「リーマン面に関連する位相幾何学」  
期日: 2015 年 8 月 24 日(月)- 27 日(木)  
場所: 東京大学大学院数理科学研究科大講義室  
世話人(敬称略): 田所勇樹(木更津高専), 佐藤隆夫(東京理科大), 佐藤正寿(岐阜大), 久野雄介(津田塾大), 河澄響矢(東大数理)

「リーマン面に関連する位相幾何学」  
期日: 2016 年 9 月 3 日(土)- 6 日(火)  
場所: 東京大学大学院数理科学研究科大講義室  
世話人(敬称略): 田所勇樹(木更津高専), 佐藤隆夫(東京理科大), 佐藤正寿(東京電機大), 河澄響矢(東大数理)

第 67 回 Encounter with Mathematics 「AGT 対応の数学と物理」  
期日: 2016 年 10 月 28 日(金)- 29 日(土)  
場所: 中央大学理工学部数学教室

「第 43 回 変換群論シンポジウム」  
期日: 2016 年 11 月 17 日(木)- 19 日(土)  
場所: 姫路市市民会館  
世話人(敬称略): 黒木慎太郎(岡山理科大学), 西村保三(福井大学教育地域科学部)

Workshop: Johnson homomorphisms and related topics  
期日: 2017 年 5 月 22 日(月)- 26 日(金)  
場所: 東京大学大学院数理科学研究科大講義室  
世話人(敬称略): Gwenael Massuyeau (Strasbourg 大), 中村博昭(岡山大), 逆井卓也(東大数理), Christine Vespa (Strasbourg 大), 河澄響矢(東大数理). (国際研究集会)

「リーマン面に関連する位相幾何学」  
期日: 2017 年 9 月 2 日(土)- 5 日(火)  
場所: 東京大学大学院数理科学研究科 123 教室  
世話人(敬称略): 田所勇樹(木更津高専), 佐藤正寿(東京電機大), 久野雄介(津田塾大), 河澄響矢(東大数理)

「葉層構造と微分同相群 2017」  
期日: 2017 年 10 月 23 日(月)- 27 日(金)  
場所: 東京大学玉原国際セミナーハウス  
世話人(敬称略): 坪井俊(東大数理)

「第 44 回 変換群論シンポジウム」  
期日: 2017 年 11 月 16 日(木)- 18 日(土)  
場所: 福井市フェニックスプラザ  
世話人(敬称略): 西村保三(福井大学教育学部), 中山雅友美(長岡工業高等専門学校)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)  
Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno and Florian Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, *Advances in Mathematics*, 査読有, 326 巻, 2018 年, 1—53, DOI: 10.1016/j.aim.2017.12.005

Nariya Kawazumi, A tensorial description of the Turaev cobracket on genus 0 compact surfaces, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, 巻 B66, 2017 年, 1—13.

Shinji Fukuhara, Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, Self-intersections of curves on a surface and Bernoulli numbers, *Osaka J. Math.*, 査読有, 55 巻, (2018 年 10 月刊行)

Nariya Kawazumi, The mapping class group orbits in the framings of compact surfaces, *Quarterly J. Math.*, 査読有, online 掲載, DOI: 10.1093/qmath/hay024

Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno and Florian Naef, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*, 査読有, 巻 355, 2017 年, 123—127, DOI: 10.1016/j.crma.2016.12.007

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, *Ann. Inst. Fourier*, 査読有, 巻 65, 2015 年, 2711—2762, DOI: 10.5802/aif.3001

[学会発表](計 13 件)  
Nariya Kawazumi, The harmonic Magnus expansion on a compact Riemann surface with non-zero tangent vectors, 2017 年 11 月 14 日, *Seminaire 'Groupes de Lie et espaces des modules'*, 招待講演, Section de mathematiques, Universite de Geneve. (スイス)

河澄響矢, 写像類群、Goldman-Turaev Lie 双代数、柏原 Vergne 問題, 2017 年 9 月 11 日, 日本数学会秋季総合分科会トポロジー分科会特別講演, 招待講演, 山形大学

河澄響矢, The Kashiwara-Vergne problem and the Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero, 2017 年 3 月 16 日, 研究集会「Low dimensional topology and number theory IX」, 招待講演, 九州大学 AiRIMaQ

Nariya Kawazumi,

Differential forms and functions on the moduli space of Riemann surfaces, 2017 年 1 月 30 日, Seminaire Algebre et topologie, 招待講演, IRMA, Universite de Strasbourg. (フランス)

Nariya Kawazumi,

Some tensor field on the Teichmuller space, 2016 年 11 月 1 日, Seminaire 'Groupes de Lie et espaces des modules', 招待講演, Section de mathematiques, Universite de Geneve. (スイス)

Nariya Kawazumi,

Some tensor field on the Teichmuller space, 2016 年 10 月 25 日, OIST workshop: MCM2016, 沖縄科学技術大学院大学

Nariya Kawazumi,

The Kashiwara-Vergne problem and the Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero, 2016 年 10 月 20 日, Pre-conference MCM2016, 東京大学大学院数理科学研究科

Nariya Kawazumi,

The Kashiwara-Vergne problem and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, I, 2016 年 7 月 28 日, Workshop on Grothendieck-Teichmuller Theories, 招待講演, Chern Institute of Mathematics, Nankai University. (中国)

Nariya Kawazumi,

Mapping class groups and the Johnson homomorphisms, I, II, 2016 年 2 月 8 - 9 日, Berkeley-Tokyo Winter School: Geometry, Topology and Representation Theory, 招待講演, Department of Mathematics, University of California, Berkeley. (アメリカ合衆国)

Nariya Kawazumi,

Algebraic aspects of the Goldman-Turaev Lie bialgebra, 2015 年 8 月 21 日, GRT, MZVs and associators, 招待講演, Hôtel Les Sources, Les Diablerets. (スイス)  
河澄響矢, 曲面上の曲線の交叉のテンソル表示について, 2015 年 7 月 10 日, 第 203 回数理情報科学談話会, 招待講演, 鹿児島大学理学部数理情報科学科.

Nariya Kawazumi,

A tensorial description of the Turaev cobracket on genus 0 compact surfaces, 2015 年 6 月 22 日, 「離散群と双曲空間の幾何と解析」, 招待講演, 京都大学数理解析研究所.

Nariya Kawazumi,

A tensorial description of the Turaev cobracket on genus 0 compact surfaces, 2015 年 6 月 4 日, French-Japanese workshop on Teichmuller spaces and surface mapping class groups, 招待講演, IRMA, University of Strasbourg. (フランス)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河澄 響矢 (KAWAZUMI, Nariya)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号: 3 0 2 1 4 6 4 6

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

田所 勇樹 (TADOKORO, Yuuki)  
木更津工業高等専門学校・基礎学系  
・准教授  
研究者番号: 1 0 4 3 5 4 1 4

佐藤 隆夫 (SATO, Takao)  
東京理科大学・理学部第二部・准教授  
研究者番号: 7 0 5 3 3 2 5 6

佐藤 正寿 (SATO, Masatoshi)  
東京電機大学・未来科学部・准教授  
研究者番号: 1 0 6 3 2 0 1 0

久野 雄介 (KUNO, Yusuke)  
津田塾大学・学芸学部・准教授  
研究者番号: 8 0 6 3 2 7 6 0

(4) 研究協力者

Robert Penner  
フランス高等科学研究所・特任教授

栗林 勝彦 (KURIBAYASHI, Katsuhiko)  
信州大学・学術研究院理学系・教授

内藤 貴仁 (NAITO, Takahito)  
日本学術振興会特別研究員 (PD)

Anton Alekseev  
ジュネーブ大学・数学セクション・教授  
(平成 28 年度より研究協力者)

Florian Naef  
マサチューセッツ工科大学・特任研究員  
(平成 28 年度より研究協力者)