

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 15 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03620

研究課題名(和文) 3次元多様体の幾何構造と組合せ構造

研究課題名(英文) Geometric structures and combinatorial structures of 3-manifolds

研究代表者

作間 誠 (Sakuma, Makoto)

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：30178602

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,700,000円

研究成果の概要(和文)：2橋絡み目に関してこれまで積み上げてきた研究の深化と一般化を目指して研究を行った。主な研究成果は以下の通りである。穴開き双曲曲面の測地ray全体が成す空間への写像類群の作用の(a.e.)遊走性の証明(Brian Bowditchとの共同研究)。双曲交代絡み目補空間のThurston-Yokota分解の辺のホモトピー非自性の証明(横田佳之との共同研究)。3次元双曲空間上の2つの放物的変換が生成する自由でない離散群の完全な決定(秋吉宏尚, 大鹿健一, John Parker, 吉田はんととの共同研究)および、それらの群の放物的生成の完全な決定(相見俊介, Donghi Lee, 坂井駿介との共同研究)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2橋絡み目は非常に特殊であるが極めて重要な研究対象である。研究代表者は秋吉宏尚, 和田昌昭, 山下靖との一連の共同研究, 及びそれに続く Donghi Lee との一連の共同研究により, 2橋絡み目の幾何構造に関する研究成果を積み上げてきた。2橋結び目に関するこれらの研究成果がどこまで一般的状況で成り立つかという問題は, 極めて自然な問題である。科研費の援助を得て, この方向で, 自分なりに納得できる研究成果を達成できたことを深く感謝している。この自然な問題に対して一定の研究成果を収めた本研究は, 客観的に見ても学術的意味と社会的意義を持つと考える。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research project is to extend and deepen the results which the PI had obtained through a series of joint works with Hirotaka Akiyoshi, Masaaki Wada and Yasushi Yamashita and through a successive series of joint works with Donghi Lee. The main results obtained by this research project are the following. For a punctured hyperbolic surface, the action of the mapping class group on the space of the geodesic rays emanating from the puncture is almost everywhere wandering (joint work with Brian Bowditch). Proof of the homotopical nontriviality of the edges of Yokota-Thurston decompositions of hyperbolic alternating links (joint work with Yoshiyuki Yokota). Classification of non-free Kleinian groups generated by two parabolic transformations (joint work with Hirotaka Akiyoshi, Ken'ichi Ohshika, John Parker and Han Yoshida), and classification of parabolic generating pairs of such groups (joint work with Shunsuke Aimi, Donghi Lee and Shunsuke Sakai).

研究分野：幾何学

キーワード：2橋結び目 クライン群 双曲構造 ヘガード分解 写像類群 双曲結び目 放物変換 測地線

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

秋吉宏尚, 和田正昭, 山下靖, 研究代表者による共同研究で, 1点穴あきトーラス群に関する Jorgensen 理論を確立し, その拡張により 2 橋絡み目の双曲構造が自然に理解できることを示唆していた。この研究は, Ian Agol が Bolyai conference における講演でアナウンスした, 2 つの放物変換で生成される自由でないライン群の分類定理およびその放物的生成対の分類定理と密接に関係するため, 研究代表者は Agol と断続的に連絡をとっていた。しかしながら, Agol は結局証明を発表しなかった。また上述の研究から, 2 橋絡み目の双曲構造と橋構造に関する様々な予想が自然に生まれていたが, その予想の核心部分(の一部)は Donghi Lee と研究代表者の一連の共同研究により, 完全に解決されていた。Agol のアナウンスの証明が待ち望まれると同時に, 2 橋結び目に関する上記の研究成果を深化させ一般化させることが重要課題として浮かび上がっていた。また, Gaven Martin との討論を通して 2 つの放物変換で生成されるライン群が作る空間には網目構造と呼ぶべき構造があるのではないかという萌芽のアイデアが生まれていた。

2. 研究の目的

2 橋結び目に関する研究成果を深化・拡張することにより, 3 次元多様体の幾何構造と組み合わせ構造の関係および「3 次元多様体の空間」への理解を深めることが目的である。

3. 研究の方法

3 次元多様体論は数学の様々な分野と密接に絡み合っており, その研究には, 一つの視点から深く掘り下げると同時に, 多角的な視点から見るのが大切である。一人だけで悩まずに, 様々な研究者と交流することにより, 位相的観点, 幾何的観点, 代数的観点, 力学系的観点を取り入れ, 発想を膨らますことを常に考えながら研究に取り組んだ。

4. 研究成果

本研究で得た主な研究成果は以下の通りである。

穴開き双曲曲面の測地 ray 全体が成す空間への写像類群の作用の研究 (Brian Bowditch との共同研究): 一つのカスプを持つ有限面積完備双曲曲面に対して, カスプから出る測地 ray 全体の空間 R に曲面の写像類群は自然に作用する。この作用は, Bowditch による双曲的穴あきトーラス束に対する McShane の等式の類似, 及び秋吉宏尚, 宮地秀樹, 研究代表者による, 一般の双曲的穴あき曲面束に対する McShane の等式の類似において重要な役割を果たしている。本研究では, その作用が殆ど至る所で遊走的であることを証明した。そのために, まず Bowditch の相対双曲群の無限遠境界に関する理論を用いて, 上記の作用が双曲構造に寄らずに自然に定まることを示した上で, 以下の結果を証明した。曲面の任意の完備双曲構造が定める R 上のユークリッド距離に関して, この作用の非遊走部分集合のハウスドルフ次元は 1 より真に小さい。これは, Masur により示された写像類群の射影的測度つき葉層構造空間への作用のエルゴード性と明確な対照をなしている。

双曲交代絡み目補空間の Thurston-Yokota 分解に関する研究 (横田佳之との共同研究): Dylan Thurston と横田佳之による双曲結び目に対する体積予想証明へのアプローチにおいて, 結び目図式から自然に構成できる結び目補空間の位相的理想単体分割 (Thurston-Yokota 分解) が重要な役割を果たす。そのためこの分割が幾何的なものであるかどうか重要な問題になる。本研究では, 双曲的交代絡み目に対しては, Thurston-Yokota 分解の全ての辺はホモトピー的に非自明であり, 従って測地線にホモトピックであることを証明した。この結果は, 上記の問題に対する (従って体積予想に対する) 着実な進展であると考えられる。証明は, Aitchison が与えた双曲的交代絡み目の非正曲率立方体分割に基づいている。

2 元生成 non-Hopfian 群の無限族の構成 (Donghi Lee との共同研究): 幾何的群論における最も重要な問題の一つとして任意の有限生成双曲群は剰余有限か, という問題がある。一方, 群が剰余有限であるなら Hopfian (即ち任意の全射自己準同型は同型) である。このことに動機付けられて, 本研究では, 双曲 2 橋結び目群を用いて, 次の条件を満たす 2 元生成 non-Hopfian 群の無限族を構成した。条件: 2 つの元からなる生成系と無限個の 2 橋結び目群の Riley 関係式からなる群表示を持ち, それは small cancellation 条件 $C(4), T(4)$ を満たす。

自由周期 2 を持つ素なアキラル結び目の無限族の構成 (Luisa Paoluzzi との共同研究): 1987 年に研究代表者が発表した論文「Non-free periodicity of amphicheiral hyperbolic knots」において, 双曲アキラル結び目は自由周期を持たないこと, 素なアキラル結び目は 3 以上の自由周期を持たないことが示され, 「自由周期 2 を持つ素なアキラル結び目は存在するか」という未解決問題が提案されていた。本研究では, そのような結び目の様々な無限族を構成することにより, この長年の未解決問題を解決した。更に, そのような結び目が持つ諸性質を明らかにした。

2 つの放物変換で生成される自由でないライン群の分類 (秋吉宏尚, 大鹿健一, John Parker,

吉田はんと共同研究)およびその放物的生成対の分類(相見俊介, Donghi Lee, 坂井駿介との共同研究): Agol は 2002 年に Budapest における Bolyai conference において「The classification of non-free 2-parabolic generator Kleinian groups」という題目で講演を行い, 2つの放物変換で生成される自由でないクライン群の分類, およびその放物的生成対の分類をアナウンスした。この研究成果は, 当時進行中であった, 秋吉, 和田, 山下との共同研究と密接に関係するため, 噂を聞いて直ぐに Agol から講演スライドを入手すると同時に, 進行途中であった我々の研究を連絡したところ, 同じ年の AMS meeting での講演では, 我々の研究に言及してくれた。しかしながら, Agol はその証明を発表しなかった。そこで, Agol の勧めもあり, このアナウンスに証明をつけることを目標とした共同研究を開始し, 最終年度終盤になってようやく完全な証明を与えるのに成功した。この証明をまとめた2編の論文は, arXiv に投稿し (arXiv:2001.09564, arXiv:2001.11662), 現在, 専門誌で査読中である。幸いにもこの研究は多くの研究者の関心を引き, 2010年2月に Oberwolfach で開催されて研究集会において最終講演者として発表する機会を与えていただいた。この研究成果は, 2つの放物変換で生成されるクライン群が作る空間の網目構造の証明への大きなステップである。

2つの放物変換で生成されるクライン群が作る空間の網目構造の研究(秋吉宏尚との進行中の共同研究): Gaven Martin との討論を通して生まれていた2つの放物変換で生成されるクライン群が作る空間の網目構造の萌芽的アイデアを, John Parker との討論, そして秋吉宏尚との共同研究を通して, ある双曲絡み目の族の双曲的 Dehn 手術空間と関係づけることにより具体的な予想として定式化し, コンピュータ実験により, 部分的に検証を行なった。この研究を Warwick, Melbourne, St. Petersburg および Oberwolfach における研究集会で発表したところ, 多くの研究者が関心を持ってくれ, 特に Francois Gueritaud とは突っ込んだ議論を行った。予想の証明のためにはまだまだ解明しなくてはならないことが沢山あるが, 研究代表者のライフワークとして取り組みたい。

ヘガード曲面の「モノドロミー群」の研究(古宇田悠哉との進行中の共同研究): 2橋絡み目に関する Donghi Lee との一連の共同研究, およびそれに関連する大鹿健一との共同研究に動機付けられて, ヘガード曲面に対して「モノドロミー群」と呼ぶ(ヘガード曲面の)写像類群の部分群を定義した。Lee との一連の共同研究により, 2橋絡み目の2橋曲面のモノドロミー群に対しては様々な良い性質があることがわかっており, 一般のヘガード曲面に対してその性質がどこまで成立するか調べることは重要な研究課題である。本研究では, その中の一つの課題「自然に定まるモノドロミー群の部分群とモノドロミー群の間にはどのような差があるか?」に対して部分的な解答を与えた。この群に関しては, 解明されるべき沢山の研究課題が待っている。

サーベイの執筆: Thurston の仕事の結び目理論への影響に関する執筆の依頼を受けたため, 「A survey of the impact of Thurston's work on knot theory」と題するサーベイを執筆した。Thurston の影響はあまりに大きすぎて執筆には多大なエネルギーと時間を必要としたが, Thurston が登場した頃に大学院生として結び目理論の勉強を開始した研究代表者が Thurston の仕事から受けたショックを前面に打ち出して, また多くの方々の協力を仰いでなんとか完成にこぎつけた。幸いレフェリーには「It brings the fascinating view point of an acknowledged expert in knot theory. (中略) It is well written and organized, and it is really interesting.」と褒めていただいて苦勞が報われる思いがした。これは厳密には研究成果に入れるべきものではないと思うが, 自分の視点を明確に打ち出したという意味で, ここに収録させていただいた。なお, 本サーベイは, 論文集「In tradition of Thurston」(編集者: Vincent Alberge, Athanase Papadopoulos, Ken'ichi Ohshika)より出版予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 7件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Paoluzzi Luisa, Sakuma Makoto	4. 巻 63
2. 論文標題 Prime amphicheiral knots with free period 2	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 105 ~ 138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0013091519000257	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Sakuma Makoto, Yokota Yoshiyuki	4. 巻 146
2. 論文標題 An application of non-positively curved cubings of alternating links	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3167 ~ 3178
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/13918	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Bowditch Brian, Sakuma Makoto	4. 巻 12
2. 論文標題 The action of the mapping class group on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Groups, Geometry, and Dynamics	6. 最初と最後の頁 703 ~ 719
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/GGD/453	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Donghi Lee and Makoto Sakuma	4. 巻 27
2. 論文標題 A family of two-generator non-Hopfian groups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Internat. J. Algebra Comput.	6. 最初と最後の頁 655-675
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) org/10.1142/S0218196717500321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Donghi Lee and Makoto Sakuma	4. 巻 25
2. 論文標題 Parabolic generating pairs of genus-one 2-bridge knot groups	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1650023, 21 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) org/10.1142/S0218216516500231	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Donghi Lee and Makoto Sakuma	4. 巻 25
2. 論文標題 Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in Heckoid orbifolds for 2-bridge links (I)	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1650067, 33pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) org/10.1142/S021821651650067X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Donghi Lee and Makoto Sakuma	4. 巻 25
2. 論文標題 Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in Heckoid orbifolds for 2-bridge links (II)	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1650066, 22 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) org/10.1142/S0218216516500668	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Donghi Lee and Makoto Sakuma	4. 巻 32
2. 論文標題 Simple loops on 2-bridge spheres in Heckoid orbifolds for the trivial knot	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 East Asian Math. J.	6. 最初と最後の頁 717-728
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/era.2012.19.97	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ken'ichi Ohshika and Makoto Sakuma	4. 巻 180
2. 論文標題 Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 117-134
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-015-0094-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計19件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 12件)

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Kleinian groups generated by two parabolic transformations
3. 学会等名 Topology and geometry of low-dimensional manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Kleinian groups generated by two parabolic transformations
3. 学会等名 Low-dimensional topology, Oberwolfach (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Kleinian groups generated by two parabolic transformations
3. 学会等名 Geometry and Topology of 3-manifolds workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Kleinian groups generated by two parabolic transformations
3. 学会等名 Representation varieties and geometric structures in low dimensions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 A conjectural picture of Kleinian groups generated by two parabolic transformations
3. 学会等名 Classical and Quantum 3-Manifold Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Agol's classification of Kleinian groups generated by two parabolic transformations
3. 学会等名 Growth 4 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 作間 誠
2. 発表標題 3次元多様体のファイバー曲面とヘガード曲面
3. 学会等名 2017年度日本数学会周期総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Fiber surfaces and Heegaard surfaces of 3-manifolds I, II
3. 学会等名 Geometry of Moduli Space of Low Dimensional Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 End Invariants of $SL(2, \mathbb{C})$ characters of the once-punctured torus
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory X (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 作間誠
2. 発表標題 結び目と3次元多様体 ~幾何構造とファイバー構造を中心として~
3. 学会等名 第63回トポロジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Kleinian groups generated by two parabolic transformations
3. 学会等名 Fundamental Groups, Representations and Geometric Structures in 3-manifold Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 作間誠
2. 発表標題 The action of the mapping class group on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface
3. 学会等名 早稲田双曲幾何幾何学の群論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Mapping class group action on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface
3. 学会等名 Invariants in low-dimensional geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Parabolic generating pairs of genus-one 2-bridge knot groups
3. 学会等名 Topology and geometry of low dimensional manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Parabolic generating pairs of 2-bridge links and Heckoid groups
3. 学会等名 Workshop on Teichmüller theory and low dimensional topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 作間 誠
2. 発表標題 The space of two-parabolic-generator Kleinian groups
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 作間 誠
2. 発表標題 The Cannon-Thurston maps and the canonical decompositions of punctured surface bundles over the circle
3. 学会等名 東京大学火曜トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 作間 誠
2. 発表標題 2 橋絡み目群のメリディアン生成系
3. 学会等名 N-KOOKセミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 作間 誠
2. 発表標題 Parabolic generating pairs of 2-bridge links and Heckoid groups
3. 学会等名 「リーマン面，不連続群」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	島田 伊知朗 (Shimada Ichiro) (10235616)	広島大学・理学研究科・教授 (15401)	
研究分担者	古宇田 悠哉 (Koda Yuya) (20525167)	広島大学・理学研究科・准教授 (15401)	
研究分担者	土井 英雄 (Doi Hideo) (50197993)	広島大学・理学研究科・准教授 (15401)	
研究分担者	秋吉 宏尚 (Akiyoshi Hirotaka) (80397611)	大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授 (24402)	
研究分担者	茂手木 公彦 (Motegi Kimihiko) (40219978)	日本大学・文理学部・教授 (32665)	
研究分担者	谷山 公規 (Taniyama Kouki) (10247207)	早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授 (32689)	
研究分担者	大山 淑之 (Ohyama Yoshiyuki) (80223981)	東京女子大学・現代教養学部・教授 (32652)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	石川 昌治 (Ishikawa Masaharu) (10361784)	東北大学・理学研究科・准教授 (11301)	
研究分担者	新國 亮 (Nikkuni Ryo) (00401878)	東京女子大学・現代教養学部・准教授 (32652)	
研究分担者	三松 佳彦 (Mitsumatsu Yoshihiko) (70190725)	中央大学・理工学部・教授 (32641)	