様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月　 1 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｈ０３６２４

研究課題名（和文）確率解析的手法によるマルコフ過程の研究と応用

研究課題名（英文）Research on Markov processes via stochastic analysis

研究代表者
重川　一郎（Shigekawa, ichiro）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：００１２７２３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　12,100,000円

研究成果の概要（和文）：確率解析的な手法でマルコフ過程の研究を、ユークリッド空間、リーマン多様体、Wiener 空間や道の空間などの無限次元空間など、さまざまな状態空間の場合を対象として行った。一次元拡散過程の場合に Kolmogorov 拡散過程のスペクトルの決定を、超対称性の枠組みで行った。また Kummer 過程の場合に、Zygmundt 空間や Orlicz 空間でスペクトルを決定した。
　その他縮小性を非対称な Dirichle 形式を使って特徴づけ、コンパクトなRiemann 多様体の場合に基本解の漸近挙動に応用した。また無限次元空間の典型例として Wiener 空間の上の非対称な拡散過程の構成を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
拡散過程の研究を行ったが、これらは数理ファイナンス、保険数学に関連するものが含まれる。また拡散過程の不変測度として、統計に表れる分布が出てくるので、統計への応用の道も開かれる。

研究成果の概要（英文）：We conducted research on Markov processes using stochastic analysis methods for cases of various state spaces, such as Euclid space, Riemannian manifold, and infinite dimensional space such as Wiener space and path space. In the case of the one-dimensional diffusion process, the spectrum of the Kolmogorov diffusion process was determined in the framework of supersymmetry. Also, in the case of Kummer process, spectra were determined in Zygmundt space or Orlicz space.
 Furthermore, we characterized the ultracontractivity using the asymmetric Dirichlet form and applied to the asymptotic behavior of the fundamental solution in the case of compact Riemannian manifolds. We also constructed a non-symmetric diffusion process on the Wiener space as a typical example of an infinite dimensional space.

研究分野：確率論

キーワード：確率解析　マルコフ半群　エルゴード性　スペクトル　対数ソボレフ不等式　スペクトルギャップ　マルコフ過程　Dirichlet 形式

１．研究開始当初の背景

本研究の代表者は主に確率解析的な手法でマルコフ過程についての研究を行ってきた。そこではユークリッド空間、リーマン多様体、Wiener 空間や道の空間などの無限次元空間など、さまざまな状態空間の場合を考え、それぞれの特性に応じたアプローチの方法を採った。一つの主題がエルゴード性に関わる問題であり、生成作用素のスペクトル、対数 Sobolev 不等式、半群の超縮小性などの観点から研究を進めてきた。

代表者は、論文 Ichiro Shigekawa: Non-symmetric diffusions on a Riemannian manifold, , Adv. Stud. Pure Math., 57, (2010), 437-461, において $\triangle + b$ を生成作用とする拡散過程を考察し、b に対する増大度に条件を付ければ L^p でマルコフ半群が構成できることを示した。また L^2 の場合は、さらに付加的な条件を付ければ、生成作用素の定義域の特徴づけを与えることが出来ることを示した。論文 Exponential convergence of Markovian semigroups and their spectra on Lp-spaces, Seiichiro Kusuoka, Ichiro Shigekawa, Kyoto J. Math. 54, No. 2, (2014) 367-399 では半群の ultracontractivity の仮定の下で、基本解の一様収束の指数オーダーが L^2 の場合と同じであることを示した。さらに、これをコンパクトリーマン多様体上の $\triangle + b$ を生成作用とする拡散過程について適用できることを示した。また論文 Ichiro Shigekawa: On spectra of 1-dimensional diffusion operators, RIMS Kokyuroku No. 1859, (2013), 59-75, で超対称性が固有関数の対応や、スペクトルの計算に有用であることを述べた。これらの研究成果を背景に、スペクトル、対数 Sobolev 不等式、半群の超縮小性の研究をさらに深めていくことを目指す。

一方最近スペクトルを使ってオプションの価格付けを論じた Linetsky (Int. J. Theor. Appl. Finance, 2004) の論文などが出された。W. Schoutens (J. Math. Anal. Appl., 2001) の論文で Stein’s method との関連でスペクトルや固有関数が議論されており、これらを超対称性という概念の下に統一的に議論できる方向性が出てきた。

２．研究の目的

本研究の目的は、マルコフ過程研究の深化である。マルコフ過程はさまざまな状態空間を取りうるが、状態空間に応じて技術的な観点や、解明すべき問題点などが異なってくる。この研究ではこれらさまざまな場合をすべて対象とし、確率解析を主要な手段として横断的に研究することを目指す。以下、いくつか具体的な問題に即して述べて行く。

(1) 一次元拡散過程

ユークリッド空間上の確率過程は、最も身近なものとして詳しく研究されているが、ここでは特に一次元の拡散過程を対象とする。一次元拡散過程は、一般に $A = a(x)\, d^2/dx^2 + b(x)\, d/dx$ を生成作用としている。特に a が 2 次式、b が 1 次式の場合が詳しく調べられており、Ornstein-Uhlenbeck 過程や、金利モデルの CIR 過程など応用上でも重要なものを多く含んでいる。超対称性は固有関数の対応や、スペクトルの計算に有用であり、対応するもう一つの作用素が $A = a\, d^2/dx^2 + (a'+ b)\, d/dx + b'$ で与えられ、a が 2 次式、b が 1 次式の場合は再び同じクラスの作用素になる。従って、作用素全体を一つのまとまった族として扱うことが可能であり、超対称性が有効に機能する族を与える。このことを利用して、スペクトルの解明と、固有関数の間の関係を組織的に研究していく。

これらの拡散過程は、Feller の定式化による標準測度(speed measure) が Pearson の分布族となり、t-分布や F-分布を含み、統計的にも興味のある対象で、W. Schoutens (J. Math. Anal. Appl., 2001) などの論文でも議論されている。当研究では、これらを超対称性という概念の下に統一的に議論することを目指す。特に Stein’s method を L^2 の枠組みで整理していく。部分的な計算は既に行ったので、これを完全なものに仕上げ、見通しの良いものにすることを目指している。これらの研究を通して、スペクトルの構造が、パラメーターに応じて対称性があることが分かってきている。例えば CIR 過程の場合はガンマ分布が speed measure になるが、ガンマ分布のパラメーター α の正負の場合で対称性がある。こうした性質をより一般的な枠組みで明らかにしていく。

スペクトルの問題と関連して対数 Sobolev 不等式の問題も重要である。代表者は、対数 Sobolev 不等式が成立する場合は、スペクトルが各 L^p 空間($1 < p < \infty$) で p に依らず同じであることを示した。その他の空間の場合はどうなるかも興味ある問題で、例えば Zygmundt 空間 $L \log L$ の場合など、どのような違いが現れるかを明らかにしていく。この場合もやはり一次元の拡散過程を用いた具体的な計算を通じて、一般的な構造の解明につなげていきたいと考えている。

(2) リーマン多様体上の拡散過程

リーマン多様体上の拡散過程の中で Laplace-Beltrami 作用素 $\triangle$ を生成作用素とする拡散過程については、爆発条件、再帰性、基本解の評価など詳しく研究されている。ここでは生成作用素が $\triangle+b$ のものを考える。b はベクトル場であり、一般に $\operatorname{div} b$ が下に有界を仮定しておく。また L^2 の場合は、さらに付加的な条件を付ければ、生成作用素の定義域の特徴づけを与えることが出来る。しかし一般の L^p の場合は生成作用素の定義域の特徴づけは完成して

いない。これらの残された問題も解決していきたい。また微分形式に働く Hodge-Kodaira 型の作用素も、非対称な場合の考察はされていない。これらについても半群の存在や、生成作用素の特徴づけなどを解明していく。

　また ultracontractivity は対称な場合には完全な必要十分条件が知られているが、非対称な場合は完全には解明されていないので、一般化を目指す。さらにこれをコンパクトリーマン多様体上の $\triangle + b$ を生成作用とする拡散過程の場合について、b の条件を解明していく。

(3) 無限次元空間上の拡散過程

　Malliavin 解析は、無限次元空間を主体にした確率解析の発展の契機となった。本研究ではそれらの成果を踏まえ、無限次元空間の上の拡散過程についても考察を行う。特に無限次元では Dirichlet 形式などの関数解析的な枠組みが有用であるのでそれらを援用し、非対称な場合まで従来の理論を拡張していくことを目指す。そこでは対数 Sobolev 不等式を基本的な道具として使っていく。

３．研究の方法

一次元拡散過程、多様体上の拡散過程、無限次元空間上の拡散過程を、それぞれの空間に応じた特性を生かしながら研究する。また応用的な問題として、数理ファイナンス・保険数学に関連する確率過程の研究も行う。主な手法として確率解析を用いるが、Dirichlet 形式などの関数解析的な手法も援用する。研究交流を促進するため、確率解析の研究会を開催する。また 2015 年には伊藤清生誕百周年記念事業の一環として RIMS プロジェクト研究集会「確率解析」が開催されるのでそれに参加し、また外国人研究者の招聘を行う。

A．研究の方向性

研究目的で述べた項目に準じて計画を述べる。

(1) 一次元拡散過程

研究目的で述べた生成作用素 $A = a\, d^2/dx^2 + b\, d/dx$ (a は 2 次式、b は 1 次式) の固有値、固有関数の性質を超対称性の観点から統一的に調べる。具体的には微分 d/dx とその双対作用素とが固有関数の対応を与えるから、このことを利用してスペクトルの解明を行う。また境界条件がある場合の境界の影響を調べる。さらに、この超対称性の考え方は Stein’s method にも関連しているので、L^2 の枠組みで Stein’s method を再構成し、さらに条件の一般化を行う。

　もう一つの問題は同族の作用素の間でのパラメーターに関する対称性を確率論的な立場から解明する。Feller による境界の分類が関わってくるはずなので、その点も明らかにしたい。対数 Sobolv 不等式との関連から、この条件の下でのスペクトルの変化を Zygmundt 空間 $L \log L$ の場合を中心に解明する。また空間ごとのスペクトルギャップと、対数 Sobolev 定数との関係も、何らかの評価が成立すると思われるので、そうした問題を考察していく。また、一次元拡散過程に関しては、極限定理も重要な主題である。代表者は確率的な現象に境界条件が関わってくることに主な興味を持っているが、分担者矢野孝次氏は拡散過程に境界の影響がどのように現れるかの研究に優れた手法を持っており、この方面での研究も進める。

(2) リーマン多様体上の拡散過程

リーマン多様体上の拡散過程として、生成作用素が $\triangle + b$ である非対称なものの研究を行う。特に L^p の枠組みでの研究を行い生成作用素の定義域の特徴づけなどを目指す。Littlewood-Paley の不等式も興味ある対象である。微分形式に働く Hodge-Kodaira 型の作用素に非対称な項を付け加えたものも考えられる。非対称な場合は研究が少ないので、この研究は新しい方向性であろう。

(3) 無限次元空間上の拡散過程

(1) で一次元拡散過程の拡散過程を考察する目的は、C(R → R) 上の Gibbs 測度との関連による。実際この研究で扱う Gibbs 測度は、一次元拡散過程から定まる定常過程として実現されるものを中心とする。この無限次元の空間 C(R→R) には、自然に Dirichlet 形式を考えることができ、その対数 Sobolev 不等式やスペクトル・ギャップの問題は古くからある。Schrödinger 作用素との対応で、ポテンシャルが狭義凸の場合には対数 Sobolev 不等式が成立することが知られているが、ポテンシャルを一般化した場合は証明されていない。凸性を緩めることは物理的なモデルを考えるうえでも重要であり、Φ^4 モデルなど、具体的なモデルを中心にこの課題に取り組んでいく。

B．研究集会及び研究者の招聘

次に、研究目的に沿った情報交換や研究交流を促進するための研究集会の開催や参加、また海外の研究者の招聘計画について述べる。

① 伊藤清生誕百周年記念数理解析研究所プロジェクト研究「確率解析」の開催

平成 27 年 9 月 7 日～11 日の日程で、プロジェクト研究「確率解析」が開催される。組織委員は舟木直久、楠岡成雄、長田博文、竹田雅好、日野正訓、熊谷隆および申請者がそのメンバーとなっている。これは伊藤清生誕百周年記念の事業の一環として開催されるが、伊藤清先生

は京都大学で主に活動されており、京都の地で記念の研究会を行うことは非常に意義のあることである。海外からも 20 名以上の研究者を招聘予定でありぜひ成功させたいと考えている。招聘研究者には Stroock, Elworthy, Miermont など Malliavin 解析を中心とする確率解析の中心的な研究者が含まれる。これらの研究者を当科研費で招聘する。

② ドイツとの交流

平成 27 年にドイツと二国間の研究集会が東北大学で計画されている。日本の確率論はドイツとの交流には実績がある。こうした日独 2 国間の研究交流は、継続が望まれる。この科研費でもそれらの交流の支援を継続的に行っていく。ドイツには M. Röckner, K.T. Sturm などの著名な研究者がおり、代表者は何度か訪問し、研究交流を行った。

③ 研究会「確率解析とその周辺」の開催

代表者は、研究協力者の会田茂樹らとともに、平成 13 年度から「確率解析とその周辺」という研究集会を毎年開催してきた。日本の研究者を中心として開催してきたが、数名の外国からの参加者を招くこともしばしば行った。確率解析の研究者に研究成果発表、研究交流の場を提供してきたという意味では、着実な実績を上げてきたといえる。これらを継続させることは、日本での確率解析の研究を発展させて行く上で重要であると考えられる。なかでも無限次元解析はその主要なテーマとして重要な位置を占めてきた。申請者の研究にも大きく関わり、研究協力者の会田茂樹、日野正訓、などとの研究連絡の場ともなっている。この研究会を継続的に開催していく。

④ 関西確率論セミナーの開催

このセミナーは長い歴史を持つものであり、継続して開催してゆく。特に顕著な結果を出した研究者を招聘し、セミナーでの発表および研究交流を積極的に進めていく。

⑤ 保険数学研究者の招聘申請者の所属する専攻では保険数学の研究が重要な位置を占めている。この分野での進展は著しいので、毎年海外の研究者を招聘し、集中講義の開講と、討論による研究交流を継続して進める。英国 City University London の S. Haberman 教授を招聘し、生保数理とファイナンス理論に関する講演と研究交流を遂行する。

４．研究成果

(1) Zygmund 空間におけるスペクトルについては次のような結果が得られた。

拡散過程から定まる半群の長時間挙動は、エルゴード性を中心に重要な話題である。特に定常状態への指数関数的な収束の速さを研究してきた。L^2 におけるスペクトルギャップはその典型的な指標である。対数 Sobolev 不等式はスペクトルギャップよりも強い性質で、L^p での収束まで導く。対数 Sobolev 不等式と、Zygmund 空間の $L \log L$ 型のノルムと密接な関係にあることは形の上の類似性から予想されるが、実際に Zygmund 空間の枠組みでのスペクトルギャップを導くことが出来た。さらに Kummer 作用素の場合にスペクトルを完全に計算することにも成功した。L^p の場合と違って、連続スペクトルが出てくるなど、特別な構造を持っていることも分かった。これらをさらに発展させ、 Kummer 過程の場合に、$L(\log L)^{\beta}$ 型の Orlicz 空間におけるスペクトルを完全に計算した。この場合は β によってスペクトルが変化することが分かった。L^p (p>1) の場合は、対数 Sobolev 不等式の条件の下ではスペクトルは変わらないので、大きな違いである。さらに β<1 の場合は、スペクトルギャップ自体が β が 0 に近づいていくと、0 に近づいていくことも成立していることが分かった。Orlicz 空間の構造がスペクトルに顕著に反映されることが現象として見出されたことになる。その結果 β によってスペクトルギャップが変化することが分かった。このことは、対数 Sobolev 不等式が成り立っても、Orlicz 空間の枠組みでは一様なスペクトルギャップが得られないことを意味する。これらの結果は雑誌 Entropy に投稿し、掲載された。

対数 Sobolev 不等式は、hypercontractivity を導くが、より強い ultracontractivity に関しても非対称な場合に成立条件を調べた。また応用として、コンパクト Riemann 多様体上の非対称な拡散過程について、基本解の $t\to\infty$ での指数的な収束を示した。

(2) 1次元拡散過程のスペクトルに関しては、次のような結果が得られた。

1 次元拡散過程のスペクトルに関しては、その構造の単純さから、スペクトルを完全に決定できる場合がいくつも知られている。古典的によく知られている場合もあるが、超対称性を利用した生成作用素のスペクトルの解析に関しては、Kolmogorov 拡散過程に対して統一的な理解が可能であることが分かった。例えば、Kolmogorov 拡散過程に対しては、Feller の意味での標準測度が Pearson 密度 ρ になることが知られている。そこから拡散係数 a と組にして自然に2パラメーターの族が導入できる。それから特に Feller の標準測度と尺度関数を使った表現による超対称性との自然な対応も付けることが出来る。これらを利用してスペクトルの解析が可能で、スペクトル及び固有関数の完全に分類を行った。特に拡散係数の次数が対応関係の特徴を与える。例えば拡散係数が 1 次の場合は線形な対応となり、2 次の場合は放物線に沿った対応となる。また、Doob の h-変換との対応や、Feller 拡散過程としての双対との関係も統一的に理解することができた。また Hankel 変換についても、超幾何関数を用いた定式化で、ユニタリー性の別証明が可能であることなども見出した。これらの枠組みには Student 過程や、Fisher-Pareto 過程、Bessel 過程、Black-Scholes 過程など、応用上重要な確率過程多が多く含まれている。

研究の副産物とし１次元拡散過程の一般的な枠組みの中で、0 を孤立したスペクトルとして持つ場合の、0-レゾルベントの表現を求めることもできた。従来知られているレゾルベントの構成に比べ、基本解の積ではなく、和になるところが興味深く思える。これらを使って、スペクトルギャップの評価（小谷の定理として知られている）の別証明を与えることもできた。

(3) 無限次元空間の上の拡散過程については次のような結果が得られた。
Wiener 空間上の非対称拡散過程について研究した。特に Dirichlet 形式による拡散過程の構成を行った。Wiener 空間で Ornstein-Uhlenbeck 過程にドリフト項を加えたものを扱った。摂動的な手法を使うために、対数 Sobolev 不等式を用いてドリフト項の処理を行った。また L^p の枠組みでも生成作用素の定義域の決定を行った。これらの結果は雑誌 Mathematical Journal of Okayama University に投稿し、掲載された。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　6　件）

① Shigekawa, Ichiro; Ultracontractivity for non-symmetric Markovian semigroups, Festschrift Masatoshi Fukushima, pp. 527-551, Interdiscip. Math. Sci., 17, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015.
DOI: 10.1142/9789814596534_0026

② Shigekawa, Ichiro; A non-symmetric diffusion process on the Wiener space, Math. J. Okayama Univ., 60 (2018), 137-153.
URI: http://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou/mjou60/_07_Shigekawa.pdf

③ Shigekawa, Ichiro; Logarithmic Sobolev Inequality and Exponential Convergence of a Markovian Semigroup in the Zygmund Space, Entropy, 20(4), (2018), 220.
DOI: 10.3390/e20040220

④ Yano, Kouji: Functional limit theorems for processes pieced together from excursions. J. Math. Soc. Japan 67 (2015), no. 4, 1859-1890.
DOI: 10.2969/jmsj/06741859

⑤ Yano, Kouji; Yano, Yuko; Yen, Ju-Yi: Weak convergence of h-transforms for one-dimensional diffusions. Statist. Probab. Lett. 122 (2017), 152-56.
DOI: 10.1016/j.spl.2016.11.007

⑥ Noba, Kei; Yano, Kouji: Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. Stochastic Process. Appl. 129 (2019), no. 5, 1697-1725.
DOI: 10.1016/j.spa.2018.06.004

〔学会発表〕（計 4 件）

① 重川一郎： Ultracontractivity for non-symmetric Markovian semigroups
2015 年 8 月 31 日(月)、 German-Japanese bilateral research project, 2015 "Stochastic Snalysis and Application" (於：東北大学)

② 重川一郎：Kolmogorov 拡散過程のスペクトル
2016 年 11 月 10 日(木)、 確率解析とその周辺（於：九州大学)

③ 重川一郎：Kolmogorov-Pearson diffusions and hypergeometric functions
2017 年 10 月 16 日(月)、 確率解析とその周辺（於：立命館大学)

④ 重川一郎：非対称拡散過程とスペクトル
2018 年 6 月 7 日(木)、 岡山確率論セミナー（於：岡山大学)

〔図書〕（計 0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/index_j.html

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：矢野 孝次

ローマ字氏名： Yano, Kouji

所属研究機関名：京都大学

部局名：理学研究科

職名：准教授
研究者番号（8 桁）：80467646

(2)研究協力者
研究協力者氏名：熊谷　　隆
ローマ字氏名：Kumagai，Takashi

研究協力者氏名：日野 正訓
ローマ字氏名：Hino，Masanori

研究協力者氏名：会田 茂樹
ローマ字氏名：Aida，Shigeki