

令和元年6月26日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15H03631

研究課題名（和文）変分汎関数の高次情報が拓く楕円型偏微分方程式の解の大域的・幾何学的構造

研究課題名（英文）Global / Geometric structure of solutions to elliptic PDE's via higher-order information of associated variational functionals

研究代表者

高橋 太 (Takahashi, Futoshi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10374901

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 10,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、変分構造を持つ楕円型方程式の境界値問題の解のうち、付随する変分汎関数の2階微分の情報を用いて定義される安定解や有限モーリス指数解について考察し、有限モーリス指数解に対するリウビル型定理・形状・対称性と領域の幾何学の関連、有限モーリス指数解の正則性理論及びアプリアリ評価の確立、及び特異安定解の構成の諸点について、微分幾何学的観点と大域解析学的観点の両側面からの解明を目指した。その際の解析に必要な Hardy 型不等式や Trudinger-Moser 型不等式の研究に成果を挙げた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形楕円型偏微分方程式の解の形状や対称性と領域の幾何学の関連については、従来から多くの研究結果があるが、解自身の無限次元臨界点理論的性質である「安定性」や「有限モーリス指数性」が解の形状をどこまで決定するか、という問題意識は新しく、本研究課題の新規な点であった。厳密形の知られている特異解の回りの変分汎関数の2階微分作用素は、不思議なことに常に Hardy 型のポテンシャル項を含んだものになり、その安定性は Hardy 不等式の成立に他ならないが、本研究課題の研究期間中には、様々な Hardy 型不等式の解析的側面の研究を進展させることができた。

研究成果の概要（英文）：In this research, we consider stable or finite Morse index solutions to the elliptic boundary value problems with variational structures. The definition of these solutions uses the second order information of the associated variational functionals. We studied several topics such as Liouville type theorems, the relation between shape and symmetries of finite Morse index solutions and the geometry of the domains, regularity theories and a priori estimates of finite Morse index solutions, and the construction of singular finite Morse index solutions, from the view points of both differential geometry and global analysis. In particular, we obtained several results on various Hardy type and Trudinger-Moser type inequalities, which are strongly related to the analysis of stable or finite Morse index solutions.

研究分野：変分法・非線形偏微分方程式論

キーワード：安定解 有限モーリス指数解 変分汎関数 非線形楕円型偏微分方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

半線形楕円型方程式の解が安定解であるとは、方程式に付随する変分汎関数の2階微分から定まる、解の回りでの線形化作用素(ヤコビ作用素)の最小固有値が非負であることをいう。より一般にヤコビ作用素の負の固有値の個数を解のモース指数と呼び、モース指数が有限となる解を有限モース指数解と呼ぶ。安定解はモース指数が0の解である。この研究課題の開始時には、A. Farinaの研究論文(2007, JMPA)やDupaigneのテキストの出版などを契機として、安定解や有限モース指数解の定性的性質が多くの研究者によって興味を持たれ、様々な解析的手法を用いて調べ始められたばかりであった。

2. 研究の目的

本研究課題では、安定解や有限モース指数解などの定性的性質を調べることを目的とし、それらの解のグラフの形状と領域の形状の関係、リウビル型非存在定理や関連するHardy型不等式の研究を行った。

3. 研究の方法

解の無限次元性である安定性や有限モース指数性と、その(有限次元性)定性的性質を関連付けるのに、等周不等式やソボレフ不等式などの微分幾何学的方法や、無限次元臨界点理論などの大域解析的方法を駆使した。

4. 研究成果

特異解の安定性不等式と同値な不等式であるHardy型不等式の研究は進展したと思う。またリウビル型方程式の非線形ノイマン境界値問題の特異極解の存在は新規な結果である。本研究課題で目指した研究の世界での潮流や学術的背景は、研究論文に和文論文として纏められ、英訳も出版予定である。期間中に研究論文12編(すべて査読付き)、AMS Sectional Meetings, AIMS Conferenceなど、海外での講演発表18回を含む38回の研究講演、日本数学会での4回の一般講演を実施した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計12件)

F. Takahashi, A simple proof of Hardy's inequality in a limiting case, *Archiv der Math.*, 104, (2015), no.1, 77-82 査読有

F. Takahashi, Extremal solutions to Liouville-Gelfand type elliptic problems with nonlinear Neumann boundary conditions, *Commun. Contemporary Math.*, 17, (2015), no.3. 1450016 (27 pages) 査読有

F. Takahashi, Blow up points and the Morse indices of solutions to the Liouville equation: inhomogeneous case, *Advanced Studies in Pure Math.* 64, "Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations" (the Proceedings of the 4th MSJ-SI), (2015), 175-182 査読有

H. Ohtsuka, and F. Takahashi, Local asymptotic nondegeneracy for multi-bubble solutions to the biharmonic Liouville-Gelfand problem in dimension four, *Differential Integral Equations*, 28, no.7-8, (2015), 801-822 査読有

M. Hashizume, and F. Takahashi, Lyapunov inequality for an elliptic problem with the Robin boundary condition, *Nonlinear Anal. T.M.A.*, 129, (2015 December), 189-197 査読有

F. Takahashi, Singular extremal solutions to a Liouville-Gelfand type problem with exponential nonlinearity, 10th AIMS proceedings, *Dynamical Systems, Differential Equations and Applications 2015*, (2015), 1025-1033 査読有

M. Sano, and F. Takahashi, Sublinear eigenvalue problems with singular weights related to the critical Hardy inequality, *Electron. J. Diff. Equ.*, Vol. 2016 (2016), No. 212, pp. 1-12 査読有

M. Sano, and F. Takahashi, Improved Rellich type inequalities in \mathbb{R}^N , "Proceedings of the 4th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's", GPPEPDEs, Palinuro, Italy, May 2015. Springer Proceedings in Math.

and Statics. Vol. 176, 241-255 査読有

高橋太、楯円型方程式の安定解の周辺, 日本数学会雑誌「数学」第 69 巻第 1 号 (2017 年 1 月冬季号) 31-55 査読有

M. Sano, and F. Takahashi, Scale invariance structures of the critical and the subcritical Hardy inequalities and their improvements, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 56, no.3, (2017), 14 pages 査読有

M. Sano, and F. Takahashi, Some improvements for a class of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, Differential Integral Equations, 31, no.1-2, (2018), 57-74 査読有

V. H. Nguyen, and F. Takahashi, On a weighted Trudinger-Moser type inequality on the whole space and related maximizing problem, Differential Integral Equations, 31, no.11-12, (2018), 785-806 査読有

〔学会発表〕(計 4 件)

2016 年日本数学会春季年会 (筑波大学) 函数方程式論分科会講演 (2016 年 3 月 16 日)
佐野めぐみ・高橋太「Scale invariance structures of the critical and the subcritical Hardy inequalities and their improvements」

2017 年日本数学会春季年会 (首都大学東京) 函数方程式論分科会講演 (2017 年 3 月 24 日)
佐野めぐみ・高橋太「Sublinear eigenvalue problems with singular weights related to the critical Hardy inequality」

2018 年日本数学会秋季総合分科会 (岡山大学) 函数方程式論分科会講演 (2018 年 9 月 24 日)

高橋太・J. Byeon「一般有界領域上での臨界 Hardy 不等式について」

2018 年日本数学会秋季総合分科会 (岡山大学) 函数方程式論分科会講演 (2018 年 9 月 24 日)

濱本直樹・高橋太「curl-free ベクトル場に対する Hardy-Leray 及び Rellich-Leray 不等式について」

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名: 加藤信 (2015 ~ 2018 年度)

ローマ字氏名: Kato, Shin

所属研究機関名: 大阪市立大学

部局名: 大学院理学研究科

職名: 准教授

研究者番号 (8 桁): 10243354

研究分担者氏名: 壁谷喜継 (2015 ~ 2018 年度)

ローマ字氏名: Kabeya, Yoshitsugu

所属研究機関名: 大阪府立大学

部局名: 理学 (系) 研究科 (研究院)

職名: 教授

研究者番号 (8桁): 70252757

研究分担者氏名: 川上竜樹 (2018年度)

ローマ字氏名: Kawakami, Tatsuki

所属研究機関名: 龍谷大学

部局名: 理工学部

職名: 准教授

研究者番号 (8桁): 20546147

研究分担者氏名: 石渡通徳 (2015~2016年度)

ローマ字氏名: Ishiwata, Michinori

所属研究機関名: 大阪大学

部局名: 基礎工学研究科

職名: 教授

研究者番号 (8桁): 30350458

研究分担者氏名: 宮本安人 (2015~2016年度)

ローマ字氏名: Miyamoto, Yasuhito

所属研究機関名: 東京大学

部局名: 数理(科)学研究科(研究院)

職名: 准教授

研究者番号 (8桁): 90374743

研究分担者氏名: 和田出秀光 (2016年度)

ローマ字氏名: Wadade, Hidemitsu

所属研究機関名: 金沢大学

部局名: 機械工学系

職名: 准教授

研究者番号 (8桁): 00466525

(2)研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。