様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月　４ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｈ０３６３５

研究課題名（和文）不連続Galerkin有限要素法の数学理論の新展開

研究課題名（英文）A new development of mathematical theory of Discontinuous Galerkin FEM

研究代表者

齊藤　宣一（Saito, Norikazu）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：００３３４７０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　12,900,000円

研究成果の概要（和文）：有限要素法（FEM）と有限体積法(FVM)の長所を両立した高精度拡張版である不連続Galerkin法（DG 法）およびハイブリッド型のDG法（HDG法）に対して，その数学的基盤理論を確立した．特に，理論だけ作って応用は計算現場に任せる，という消極的な立場を超えるため，具体的な応用を設定した上で，要請される基礎理論の構築を行ったことが本研究の特徴である．具体的にはFEMやFVMでは困難の多い，異方拡散問題や数理生物に現れる非線形移流拡散，退化拡散問題，時間非定常問題に対して，構造保存（流束，正値性，エネルギーなど）と解析理論（実用的な意味での安定性と収束性など）を両立した計算手法を構築した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
偏微分方程式の数値計算に基づくシミュレーションは，現代における最も強力な科学技術の一つであり，数学的な立場からの数値計算方法の研究（数値解析）は，これらの科学技術の屋台骨を支える基盤と言える．しかし，数学者と技術者では，研究の方向性が異なり，実際，経験に大きく依存した大規模計算によるスピード感ある研究に，数値解析の理論が追い付けてなかった．しかし，この溝を放置すれば，数学的方法における数学の不在に繋がり，発展は頭打ちとなるであろう．本研究は，数学理論のこの溝を埋めつつ，数値解析自体の更なる深化を実現した．

研究成果の概要（英文）：This study project has succeeded in establishing the foundational theory of the discontinuous Galerkin finite element method (DG method) and the hybridized DG method (HDG method), which are extended versions combining the advantages of the finite element method (FEM) and the finite volume method (FVM) with a high-precision. This project aims to go beyond the negative position of making only the theory and leaving the application to engineers and to construct a mathematical theory that is required in real applications. Specifically, structural preservation (flux, positivity) methods and analytical theory (such as stability and convergence in practical sense) were constructed for nonstandard diffusion problems, degenerate diffusion problem and evolution problems appearing in various fields.

研究分野：数値解析学

キーワード：不連続Galerkin法　有限要素法　楕円型方程式　放物型方程式　非線形問題　誤差解析　構造保存型数値解法　発展方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

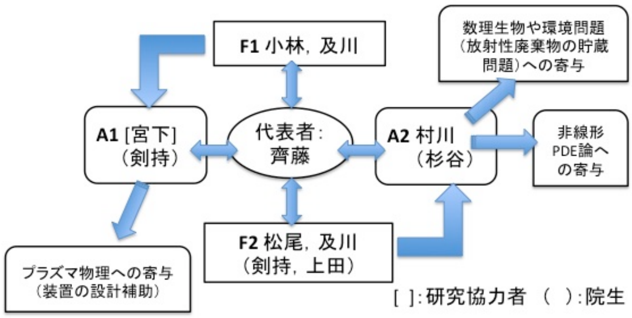
１．　　研究開始当初の背景

偏微分方程式（PDE）の数値計算に基づくシミュレーションは，現代における最も強力な科学技術の一つである．その中で，FEM の収束解析などに代表される，数学的な立場からの数値計算方法の研究（以下，この立場を数値解析とよぶ）は，これらの科学技術の屋台骨を支える基盤と言える．数値解析学者にとって，方法の妥当性・正当性は，近似解の安定性・収束性などの解析理論にある一方で，現場の技術者にとっては，観察したい現象をそれらしく再現する方法が良い方法である．このような溝の存在は，今に始まったことではないが，経験に大きく依存した大規模計算によるスピード感ある研究に，数値解析の理論が追い付けないのが現状である．しかし，この溝を放置すれば，いずれは，数学的方法における数学の不在に繋がり，発展は頭打ちとなるであろう．特に，数値解析は，単なる近似解の提供だけでなく，PDE などの数理モデルを解くための現実的な方法を与えると言う意味で，現象と数学理論を繋ぐ重要な役割を持っている．
そこで，この溝を埋めつつ，数値解析自体の更なる深化を目標として，代表者は，本研究の元となる「有限体積法の数学的基盤理論の確立」（基盤(B)，H23--26）（以下[S]と書く）を立案・実施した．[S]では，構造（流束，正値性など）保存型であり，とくに宇宙航空工学で応用されている FVM について，その数学的基礎付けを遂行した．すなわち，技術者が経験上それらしいと感じる根拠は構造（流束，正値性，安定性，エネルギーなど）の保存にあるという観点から，数値解析の理論と，技術者の経験に対応した構造の保存を，一貫した理論で整理した．FVM は，区分定数関数近似に基づく方法であり，構造保存の長所は何物にも代え難い一方で，精度の面からは多くを期待できない．また，変数係数の複雑な PDE に対しては，構造の保存（例えば正値性）を実現するための自由度が足りないとう問題がある．そこで，[S]の終盤において，FVM の自然な高精度拡張版である DG 法の研究に着手した．標準的な FEM では，領域を三角形など（要素）に分割し，領域全体で連続な区分的多項式を近似関数として用いて近似を行う．DG 法では，要素間での不連続性を認め，FVM の数値流束という概念を取り入れることで，その不連続性を制御する．結果として，DG 法は，FEM と FVM のそれぞれの長所を両立するばかりか，要素として任意の多角形が採用でき，要素ごとに異なる次数の多項式が利用できる．しかし，DG 法では，普通の FEM に比べ，要する未知数の数が多くなってしまう．その欠点を克服するため，要素内部と要素境界上での 2 種類の異なる近似関数を用いる HDG 法が提案された．一見，さらに未知数の個数は増えるように思われるが，要素内部の未知数は，最終的に要素境界上の未知数（数値流束に対応）に帰着されるので，必要となる未知数の個数は劇的に少なくて済む．応用計算では，HDG 法への期待が高く，また，その数学理論も挑戦的な課題である．
DG 法・HDG 法の数学的研究は，欧米・中国において，ここ十年，熾烈であり続け，現在では，応用段階に入っていると思われる．しかし，関数解析学の理論に乗りやすい長所がかえって災いし，本来重要なはずの基本性質の多くを仮定したまま，鮮やかな理論ばかりが先行したきらいがある．すなわち，上で指摘した溝は，DG 法において，より広がっているのである．本研究では，DG 法・HDG 法を対象として，[S]の動機と方針を継承し発展させ，引き続き，構造保存と解析理論を両立した計算手法を構築し，各分野の研究に貢献する．

２．研究の目的

上記の趣旨を踏まえ，現在までの研究進捗，研究分担者の過去の研究内容を考慮して，研究期間内での具体的な到達目標を次のように設定する．基礎理論を指向する F1，F2 と応用に直結した A1，A2 に大別する．基礎理論は，HDG 法に重点を置く．
F1. HDG 法の近似能力の基礎研究: HDG 法の補間誤差や局所射影誤差と要素形状の関係を明らかにする．また，線形の楕円型方程式などを近似した際の，係数行列の性質（最大値原理を意識している）と要素形状の関係を明らかにする．
F2. 時間非定常問題（放物型）に対する DG/HDG 法の基礎研究: 空間 HDG 法・時間 DG 法による離散化を，線形放物型・双曲型問題に適用し，その数学的基礎理論を構築する．安定性確保の目的で，エネルギー散逸・保存性を再現するスキームの導出を行なう．
A1. 異方・非標準拡散拡散問題に対する安定な HDG 法の開発と解析: できるだけ任意の拡散と任意のメッシュ形状に対して，安定な HDG スキームを構成し，特に，HDG 法による離散最大値原理の実現を目標とする．
A2. 数理生物に現れる非線形拡散・非線形移流問題に対する DG/HDG 法: 数理生物学においては，正値性の保存や体積保存（流束保存）は必須の基本性質である．代表者・分担者が細胞性粘菌の数理モデル（Keller-Segel（KS）系）や退化放物系に対して確立してきた保存型上流 FEM，FVM を，DG 法の文脈で再定式化し，保存性をできるだけ維持したまま，高精度の数値解法の提案と，その正当性の確立を行う．次に，その解法を構造保存という観点から再考察し，理論を発展させる

3. 研究の方法



本研究は基礎的な F1，F2 と応用指向の A1，A2 の 4 つのユニットに分かれて遂行される．F1 と A1 は楕円型・時間定常問題，F2 と A2 は放物型・時間非定常問題を主に扱う．各ユニットの課題は，参加者の研究業績から直接に接続され，直ちに研究が開始できる．あえて，このような課題の対比を作ることで，いままで意識されていなかった視点からのアプローチを模索し，研究の深化をはかる．

本計画では，院生の実質的な研究参加も，重要な要素である．全体を通じて，本研究を，各研究者の個人研究の集合と考えるのではなく，研究協力者，院生も巻き込んだチーム研究であるという共通認識を持つ．

４．研究成果

抽象的な放物型発展方程式を考え，不連続 Galerkin 時間離散化(DG time-stepping, dG(q))法が Lions の弱形式に対する DG 法として解釈できることに着目して,変分法的な解析を行なった．具体的には，Banach-Necas-Babuska (BNB) 定理に基づいて，DG 双線形形式に対して，Babuska-Brezzi (inf-sup)条件を導出し，それを元に，準最良近似評価式の成立を証明した．さらに，標準的な補間誤差評価と組み合わせることで，最適誤差評価を得ることができた．以上の議論では，ひとたび Babuska-Brezzi 条件が得らたならば，あとは，楕円型方程式の Galerkin 近似の解析とほぼ同様に考察を進めることができる．すなわち，放物型問題をあたかも楕円型のように扱えるのが，本研究の最大の利点である．さらに，この結果を具体的な偏微分方程式の全離散スキームへ応用した．具体的には，熱方式の Dirichlet 境界値問題を，空間変数について，連続かつ区分的 k 次多項式を用いた標準的な有限要素法 (cG(k)法) で離散化する．時間連続 cG(k)法の誤差評価や安定性は，よく研究されているので，その結果と本研究の結果を合わせることで，時間変数を dG(q)法で離散化した dG(q)-cG(k)法の最適誤差評価が得られた．

動的・力学的境界条件など，境界上で高階の微分作用素を含むような境界条件の数値解析への準備として，滑らかな境界上で定義された楕円型方程式の Robin 境界値問題の Nitsche 法 (という境界条件の安定な取り込み方法) を用いた DG 法の研究に取り組み，詳細な誤差評価を導出した．また，DG 法の解析は，簡単な Poisson 方程式にでさえも，エネルギーノルムか L2 ノルムでしか行われていなかったが，弱最大値原理の概念を DG 法に導入し，それに基づく最大値ノルムでの誤差評価を導出した．

プラズマシミュレーションに現れる楕円型界面問題に対して，HDG を提案した．従来の研究と比較すると，Galerkin 直交性を自然に満たすスキームとなっており，理論的・実用的な価値が高い．また，有限要素法の誤差解析の標準的な理論で要請される解の正則性は，一般には，界面問題では期待できない．それを踏まえて，解が分数冪のソボレフ空間に属することのみを仮定して，誤差解析を行い，最適な収束率の導出に成功した．

N を 2 以上の整数とする.R^n の球状領域で定義された Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題の球対称解を計算するための DG 法を提案し，問題の適切性と最適誤差評価を導出した．

細胞接着の数理モデルに関連する非線形非局所凝集拡散方程式ついての数値解析及び数理解析を行った．空間離散化法としては風上型有限体積法を採用し，数値解の非負性及びエネルギー散逸性を保つ数値解法を構成し，これらを解析的に証明した．さらに，数値解の有界性，可解性，同程度連続性，収束性などについて解析的に証明した．一方，非線形拡散問題に対する線形数値解法についての研究を進め、その線形解法を応用上重要な非線形拡散・移流・反応方程式に適用した．その問題に対して解析解を構成し、数値解と解析解を比較することにより、線形解法の収束性及び有用性を実証した．

Raviart-Thomas 有限要素法について，誤差評価を行った．その結果として，Crouzeix-Raviart 補間は三角形の最大辺の長さによって誤差が押さえられるにも関わらず，Crouzeix-Raviart 有限要素法の場合には三角形の外接半径が誤差に大きく影響することがわかった．

Stokes 方程式において、滑らかな領域上の滑り境界条件を扱うためのペナルティー法（法線方

向のみに課されたDirichlet型境界条件をRobin型で近似する方法）を時間非定常問題に拡張し，偏微分方程式問題と有限要素近似の解析し，精密な誤差評価の導出に成功した．有限要素法を用いる利点の１つとして，曲がった境界を持つ領域上の境界値問題に適用しやすいことが挙げられる．しかし，実際には元の領域を多角形領域で近似してから三角形分割を行うため，理論的な誤差評価においては領域近似の誤差も考慮する必要がある．この点は非適合有限要素法（DG法を含む）の理論誤差解析ではほとんど考慮されていなかった．分担者・柏原は，滑り境界条件を課したStokes方程式に対するCrouzeix-Raviart有限要素近似に対して，空間２次元の場合に最適な誤差評価を導くことに成功した．

ハイブリッド不連続ガレルキン法に基づく構造保存解法を並列計算機上に実装し，構造保存性を保ちつつ，高速化が図れることを実証した．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計８件）

① M. Miyashita and N. Saito, Hybridized discontinuous Galerkin method for elliptic interface problems: error estimates under low regularity assumptions of solutions, J. Sci. Comput.,Vol. 76(3), 2018, 1657-1673, 10.1007/s10915-018-0678-x
② H. Murakawa, An efficient linear scheme to approximate nonlinear diffusion problems, Jpn. J. Ind. Appl. Math.,Vol.35(1), 2018, 71–101, 10.1007/s13160-017-0279-3
③ G. Zhou and N. Saito, Finite volume methods for a Keller-Segel system: discrete energy, error estimates and numerical blow-up analysis, Numer. Math., Vol. 135(1), 2017, 265-311, 10.1007/s00211-016-0793-2
④ H. Kojima and T. Matsuo and D. Furihata, Some discrete inequalities for central-difference type operators, Math. Comp., Vol. 86(306), 2017, 1719-1739, 10.1090/mcom/3154
⑤ H. Murakawa, A linear finite volume method for nonlinear cross-diffusion systems, Numer. Math., Vol. 136(1), 2017, 1-26, 10.1007/s00211-016-0832-z
⑥ Y. Miyatake, D. Cohen, D. Furihata, and T. Matsuo, Geometric numerical integrators for Hunter-Saxton like equations, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 34, 2017, 441–472.
⑦ K. Kobayashi and T. Tsuchiya, Approximating surface areas by interpolations on triangulations, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 34, 2017, 509-530, 10.1007/s13160-017-0253-0
⑧ G. Zhou and T. Kashiwabara and I. Oikawa, A penalty method for the time-dependent Stokes problem with the slip boundary condition and its finite element approximation, Appl. Math. Vol. 62, 2017, 377-403, 10.21136/AM.2017.0328-16

〔学会発表〕（計９件）

① Y. Chiba and N. Saito, Discontinuous Galerkin method for an N-dimensional spherically symmetric Poisson equation, The 13th SIAM East Asian Section Conference, 2018
② N. Saito, Variational analysis of the DG time-stepping method for parabolic equations, The Seventh China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, 2018
③ K. Kobayashi, The relation between Crouzeix-Raviart and Raviart-Thomas finite element methods　Australia New Zealand Industrial and Applied Mathematics 54th Annual Conference, 2018
④ N. Saito, Convergence of the immersed-boundary finite-element method for the Stokes problem (invited lecture), ECM 2017: International Conference on Engineering and Computational Mathematics, 2017
⑤ 齊藤宣一，Banach-Necas-Babuska の定理と DG time-stepping 法，RIMS 共同研究(公開型)：数値解析学の最前線：理論・方法・応用，2017 年
⑥ T. Matsuo, On some finite-difference based structure-preserving methods for partial differential equations, EASIAM 2017, 2017
⑦ N. Saito and T. Kemmochi, Discrete maximal regularity and the finite element method for parabolic problems (invited lecture), CJK2016: The Sixth China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, 2016
⑧ 宮下大，齊藤宣一，プラズマ物理学における高周波シースモデルの数理的特性調査，日本応用数理学会 2016 年度年会，2016 年
⑨ 松尾宇泰，数値計算における「構造保存」の考え方について，数理解析研究所研究集会「現

象解明に向けた数値解析学の新展開」，2015 年

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.infsup.jp/saito/ws/dg15_18.html

６．研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：松尾宇泰
ローマ字氏名：(MATSUO, Takayasu)
所属研究機関名：東京大学
部局名：大学院情報理工学系研究科
職名：教授
研究者番号（８桁）：90293670

研究分担者氏名：小林健太
ローマ字氏名：(KOBAYASHI, Kenta)
所属研究機関名：一橋大学
部局名：大学院経営管理研究科
職名：教授
研究者番号（８桁）：60432902

研究分担者氏名：村川秀樹
ローマ字氏名：(MURAKAWA, Hideki)
所属研究機関名：九州大学
部局名：大学院数理学研究院
職名：助教
研究者番号（８桁）：40432116

研究分担者氏名：柏原崇人
ローマ字氏名：(KASHIWABARA, Takahito)
所属研究機関名：東京大学
部局名：大学院数理科学研究科
職名：助教
研究者番号（８桁）：80771477

(2)研究協力者
研究協力者氏名：及川一誠
ローマ字氏名：(OIKAWA, Issei)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。