

令和 3 年 5 月 7 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H03637

研究課題名(和文)関数方程式に対する精度保証付き数値計算法の展開

研究課題名(英文)Expansion of numerical verification methods for functional equations

研究代表者

渡部 善隆 (Watanabe, Yoshitaka)

九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授

研究者番号：90243972

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,100,000円

研究成果の概要(和文)：自然現象を科学的に記述するために用いられる微分方程式をはじめ各種関数方程式に対し、コンピュータで計算した結果に数学的な厳密な保証を与える「精度保証付き数値計算」の理論・応用・手法に関する研究を行いました。一般的な関数空間における線形作用素の可逆性と逆作用素ノルムの効率的かつ最適な上界評価を得ることに成功し、この評価に基づく非線形関数方程式の解の存在あるいは一意性をコンピュータにより厳密に検証するための枠組みの構築を達成しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形関数方程式、特に非線形偏微分方程式を統一的に扱う数学理論は現在のところ存在しません。そのため、解を解析的に導くことを回避したコンピュータによる近似計算が多く行われています。しかし、計算結果には誤差の混入が不可避です。本研究の成果は、解析解とコンピュータによる近似計算の間に横たわる誤差を数学的に厳密に取り扱うことを可能とするだけでなく、未解決であった非線形関数方程式の解の存在検証を可能にする意義を持つと考えます。

研究成果の概要(英文)：We conducted research on the theory, application, and method of "numerical verification method" or "computer-assisted proof" that provides mathematical and exact guarantees for computer calculations of differential equations and other functional equations used to scientifically describe natural phenomena.

We have successfully obtained an efficient approach of the invertibility estimation of linear operators and the its inverse operator norm with optimal upper bound in a general functional space. We have also established a framework for rigorous computer verification of the existence or uniqueness of solutions to nonlinear functional equations based on this estimation.

研究分野：数値解析

キーワード：精度保証付き数値計算 計算機援用証明 非線形関数方程式 Navier-Stokes方程式 非線形偏微分方程式 有限要素法 射影近似と誤差解析 不動点定理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

計算機で実行できる実数値・複素数値の演算は有限桁の浮動小数点数による近似計算であり、その演算結果には丸め誤差と呼ばれる近似誤差が生じます。近年、浮動小数点演算における丸め誤差を含む計算結果の数学的に厳密な保証が高い精度で効率よく実現できることが明らかにされ、計算結果の信頼性(品質保証)の問題が応用解析学や計算理工学の分野で注目されています。さらに、計算結果の品質保証は数値計算アルゴリズムそのものにも影響を与え、様々な数理科学上に現れる問題の解を計算機によって数値的に検証するという方向にまで進展しつつあります。この種の数値計算法は精度保証付き数値計算法または計算機援用証明と呼ばれ、理論解析が困難な問題に対する数値的証明として、その意義が国内外において急速に高まっています。

## 2. 研究の目的

精度保証付き数値計算とは、問題に対する解の存在と誤差限界を数学的に保証する数値計算法です。研究代表者らは、精度保証付き数値計算により、

- (1) 無限次元関数空間における線形作用素の可逆性の検証条件を導き、
- (2) 線形作用素の逆作用素を有限次元作用素で一様近似する理論を構築してきました。

本研究課題は、(1)(2)の研究成果を基盤として、非線形偏微分方程式に代表される関数方程式の解に対する計算機援用証明の適用範囲を格段に広げることを目的としました。また、具体的な応用として、流体力学の基礎方程式に対する精度保証付き数値計算を行い、結実した成果を、非線形発展方程式に対する解の存在検証法の確立と数理モデルの計算機援用証明に展開することを目指しました。

## 3. 研究の方法

### (1) 無限次元 Newton 法による精度保証付き数値計算法の確立

申請者らがこれまでの研究で得た知見である、一般的な関数空間における無限次元線形作用素の可逆性の検証と逆作用素の精度保証付きノルム評価方法を基盤とし、非線形偏微分方程式の解の存在と局所一意性を計算機内で自動的に検証する数値的手法の確立を目指しました。また、手法を積分方程式などの一般の関数方程式にも適用できるように拡張・整備しました。具体的には、何らかの方法で得られた関数方程式の近似解の周りで方程式を線形化し、線形化作用素の可逆性と逆作用素ノルム評価をもとにした無限次元 Newton 法を導きます。その際、計算機により取り扱うことのできる近似解による残差引き戻し形と Hilbert 空間における不動点定式化が最重要案件になると予想されます。変分原理に基づく弱形式化と適切な基底関数の選択によって、提案する無限次元 Newton 法が従来手法に比べ高精度かつ低コストで解の検証を実現できることを、非線形楕円型問題、反応拡散方程式、常微分方程式系、熱対流問題などの具体的な適用例により確認するとともに、各種境界条件や任意領域への対応も検討しました。

### (2) 線形化作用素の可逆性を必要としない検証原理の探求

手順(1)の基幹となる線形化作用素の可逆性の確認と有限次元作用素による一様近似は、有限次元行列に対するスペクトルノルム評価すなわち特異値問題に帰着されることが確認されています。特に偏微分作用素を Galerkin 近似により離散化して得られる行列の多くは大規模かつスパース構造を持ち、一般に Hermite 性・正定値性は保証されません。また、疎行列の構造を保ったままのスペクトルノルムの精度保証計算は現状では限界があり、計算コストの面で課題があります。この難点を克服するため、解を包み込むことが期待される有限次元の集合部分を区間と基底関数で表現する解の検証手法(区間 Newton 法)について広く探求しました。これは、研究協力者・中尾が 2 階楕円型線形偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法として世界に先駆けて提起した理論(Jpn. J. Appl. Math. 5, pp. 313-332, 1988)の再構築・一般化に対応します。本手順の検証は、(1)と比較して線形化作用素の可逆性の確認が必要ないという利点を持ちます。一般的な検証原理を導いた後は、具体的な問題に対し(1)(2)の適応性を計算コストとあわせて比較しました。

### (3) Orr-Sommerfeld 方程式に対する臨界 Reynolds 数の包み込み

手順(1)で得られた基盤技術の具体的な応用として、基本流れの安定性を記述する Orr-Sommerfeld 方程式方程式の精度保証付き数値計算を遂行しました。特に、Poiseuille 流れの中立安定曲線の最小値となる臨界 Reynolds 数については、W.K. Heisenberg (1932 年ノーベル物理学賞受賞)によってその存在が予見され、その後、膨大な数の数値計算が行なわれたにも関わらず、数学的に厳密な存在範囲は特定されていません。Heisenberg が提起した 90 年越しの懸案を、計算機援用証明によって決着させることを目指しました。

#### (4) Navier-Stokes 方程式に対する解の存在検証と安定性解析

(1)(2)(3)の成果を糧に、流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式に対する精度保証付き数値計算に正面から取り組みました。有限要素基底、スペクトル展開、直交多項式などの各種有限次元近似とその構成的誤差評価を駆逐することで、2次元および3次元の Navier-Stokes 方程式の定常解を可能な限り一般的な領域と境界条件のもとに包み込み、存在検証に成功した定常解での線形化作用素に対する非自己共役固有値問題の複素平面における大域構造を解明することにより、流れの安定性解析を行いました。

### 4. 研究成果

- (1) 申請者がこれまでの研究で得た知見である、一般的な関数空間における無限次元線形作用素の可逆性の検証と逆作用素の精度保証付きノルム評価方法を基盤とし、非線形偏微分方程式の解の存在と局所一意性を計算機内で自動的に検証する数値的手法を与えることに成功しました。この手法は、何らかの方法で得られた関数方程式の近似解の周りで方程式を線形化し、線形化作用素の可逆性と逆作用素ノルム評価をもとにした無限次元 Newton 法に帰着させるものであり、変分原理に基づく弱形式化と適切な基底関数の選択によって、提案する無限次元 Newton 法が従来の手法に比べ高精度かつ低コストで解の検証を実現できることを、いくつかの検証例により確認することができました。
- (2) 無限次元 Newton 法に基づく手順の基幹となる線形化作用素の可逆性の確認と有限次元作用素による一様近似は、有限次元行列に対するスペクトルノルム評価に帰着されることが確認されています。特に偏微分作用素を Galerkin 近似により離散化して得られる行列の多くは大規模かつスパース構造を持ち、一般に Hermite 性・正定値性は保証されません。この難点を克服するため、解を包み込むことが期待される有限次元の集合部分を区間と基底関数で表現する解の検証手法(区間 Newton 法)について探求し、2次元 Navier-Stokes 方程式に特別な外力項を与えた問題に対する精度保証付き数値計算に成功しました。
- (3) 無限次元線形作用素の可逆性の検証と逆作用素の精度保証付きノルム評価方法を一般の Hilbert 空間に拡張することに成功し、あわせてこの評価方法が、任意の有限次元近似空間を取ることができるという条件の下で最適な評価になることを具体的な検証例とともに明らかにしました。さらに、少ない計算コストにより線形作用素の可逆性と精度保証付き逆作用素ノルムを評価する新しい理論を導くことに成功し、2階楕円型問題に対してその有効性を明らかにしました。
- (4) 線形重調和方程式に対する構成的誤差評価を与え、具体的な領域および近似空間に対する計算機援用証明を行うことによりその有効性を確認しました。また、流体力学の基礎方程式のひとつである Navier-Stokes 方程式の流れ関数表示から導かれる非線形作用素のコンパクト性を理論的に証明しました。作用素のコンパクト性は適用する不動点定理および検証アルゴリズムに対して重要な情報を与えることが知られているため、今後の理論面・応用面の展開が期待されます。
- (5) これまでの研究により得られた技術を基盤とする非線形偏微分方程式の解の存在と局所一意性を計算機内で自動的に検証する数値的手法を様々な方程式に対し適用しました。具体的には、Navier-Stokes 方程式に特別な外力項を付与した Kolmogorov 問題とその対称性破壊分岐点の検証、また Navier-Stokes 方程式の安定性を記述する非自己共役固有値問題である Orr-Sommerfeld 方程式、3次元波動方程式などに対する精度保証付き数値計算に取り組みました。さらに、個々の方程式に対し、精度保証付き数値計算をアルゴリズムレベルおよびプログラムレベルにおいて効率化する過程で得られた知見を従来の手順にフィードバックすることにより、計算機援用証明理論を堅牢化・精錬化しました。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kinoshita Takehiko, Watanabe Yoshitaka, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 266
2. 論文標題 An alternative approach to norm bound computation for inverses of linear operators in Hilbert spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 5431 ~ 5447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.10.027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Yoshitaka, Kinoshita Takehiko, Nakao Mitsuhiro T.	4. 巻 (online)
2. 論文標題 An improved method for verifying the existence and bounds of the inverse of second-order linear elliptic operators mapping to dual space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 (online)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-019-00344-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Yoshitaka, Nakao Mitsuhiro T., Nagatou Kaori	4. 巻 9
2. 論文標題 On the compactness of a nonlinear operator related to stream function-vorticity formulation for the Navier-Stokes equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 77 ~ 80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.9.77	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, and Mitsuhiro T. Nakao	4. 巻 25
2. 論文標題 Validated constructive error estimations for biharmonic problems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Reliable Computing	6. 最初と最後の頁 168 ~ 177
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Nobito Yamamoto, and Mitsuhiro T. Nakao	4. 巻 33
2. 論文標題 Some remarks on a priori estimates of highly regular solutions for the Poisson equation in polygonal domains	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 629-636
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-016-0223-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshitaka Watanabe	4. 巻 302
2. 論文標題 An efficient numerical verification method for the Kolmogorov problem of incompressible viscous fluid	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Computational and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 157-170
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2016.01.055	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshitaka Watanabe, Kaori Nagatou, Michael Plum, and Mitsuhiro T. Nakao	4. 巻 260
2. 論文標題 Norm bound computation for inverses of linear operators in Hilbert spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 6363-6374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2015.12.041	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, and Mitsuhiro T. Nakao	4. 巻 9553
2. 論文標題 Some remarks on the rigorous estimation of inverse linear elliptic operators	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 225-235
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-31769-4_18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, and Mitsuhiro T. Nakao	4. 巻 6
2. 論文標題 Recurrence Relations of Orthogonal Polynomials in H01 and H02	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE	6. 最初と最後の頁 404-409
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1587/nolta.6.404	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshitaka Watanabe and Mitsuhiro T. Nakao	4. 巻 276
2. 論文標題 A numerical verification method for nonlinear functional equations based on infinite-dimensional Newton-like iteration	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 239-251
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2015.12.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計28件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 山本 野人, 中尾 充宏
2. 発表標題 Poisson方程式に対する構成的高次誤差評価とその応用
3. 学会等名 日本数学会2019年年会, 東京工業大学, 応用数学科会講演アブストラクト, pp. 55-56, 2019年3月17日~20日
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 山本 野人, 中尾 充宏
2. 発表標題 Poisson方程式に対する構成的高次誤差評価
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年研究部会連合発表会, 筑波大学, 2019年3月4日~5日
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡部 善隆
2. 発表標題 精度保証付き数値計算入門《応用編》
3. 学会等名 平成30年度NIFS共同研究 研究会「MHDシミュレーションにおける精度保証の可能性について」 核融合科学研究所, 土岐市, 岐阜県, 2018年12月11日～12日
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshitaka Watanabe
2. 発表標題 The essence of numerical verification methods for PDEs
3. 学会等名 2018 Workshop on Recent views of Nonlinear Analysis, December 8-10, 2018, The Toba Chamber of Commerce and Industry, Toba, Japan
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡部 善隆
2. 発表標題 反復解法における誤差履歴
3. 学会等名 第2回精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会(NVR 2018), 広島インテリジェントホテルスタジアム前, 広島市, 2018年12月1日～12月2日
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 2階線形楕円型作用素に対する可逆性検証と精度保証付きノルム評価の改善
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, 岡山大学, 岡山市, 2018年9月24日～9月27日
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Nobito Yamamoto and Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 A higher order error estimation for finite element approximations of the Poisson equation
3. 学会等名 18th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2018), September 10-15, 2018, Waseda University, Japan
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshitaka Watanabe, Michael Plum, Kaori Nagatou and Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 Verified computations of eigenvalue exclosures for linearized Kolmogorov problem
3. 学会等名 18th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2018), September 10-15, 2018, Waseda University, Japan
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏:
2. 発表標題 2階楕円型作用素に対する逆作用素ノルム評価の改良
3. 学会等名 日本応用数学会2018年度年会講演予稿集, 名古屋大学東山キャンパス, 名古屋市, 2018年9月3日~9月5日
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshitaka Watanabe
2. 発表標題 Some computer-assisted proofs for the Navier-Stokes equations
3. 学会等名 Rigorous Numerics for Infinite Dimensional Nonlinear Dynamics (17w5141), Rigorous Numerics for Infinite Dimensional Nonlinear Dynamics (17w5141), Banff, Canada, May 8-12, 2017. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏
2. 発表標題 値域が共役空間となる2階楕円型作用素に対する可逆性検証法の改良
3. 学会等名 日本応用数理学会2017年度年会講演予稿集, 武蔵野大学有明キャンパス, 東京都, 2017年9月6日~9月8日.
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏
2. 発表標題 Hilbert空間における線形作用素に対する逆作用素ノルム評価の改良
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, 山形大学, 山形市, 2017年9月11日~9月14日.
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 重調和問題の解に対する構成的誤差評価
3. 学会等名 第1回精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会(NVR 2017), 西日本総合展示場, 北九州市, 2017年12月9日~10日.
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 Legendre多項式を用いた重調和問題の構成的誤差評価(といくつかの課題)
3. 学会等名 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2017年12月14日~16日.
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡部 善隆
2. 発表標題 Kolmogorov問題に対する計算機援用証明における最大値ノルムの改良
3. 学会等名 研究集会: 不連続Galerkin有限要素法の数学理論とその周辺, コンフォートホテル長崎会議室, 長崎市, 2018年2月14日~15日.
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 Laplacianノルム評価を援用した楕円型線形作用素の可逆性検証
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年研究部会連合発表会, 大阪大学, 2018年3月15日~16日.
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏
2. 発表標題 値域が共役空間となる楕円型作用素に対する精度保証付き可逆性検証
3. 学会等名 日本数学会2018年年会, 東京大学, 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 103-106, 2018年3月18日~21日,
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshitaka Watanabe
2. 発表標題 A higher order error estimation of the Poisson equation and its applications
3. 学会等名 International Workshop on Numerical Methods for Partial Differential Equations, Hong Kong, China, March 26-28, 2018.
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏
2. 発表標題 あるコンパクト作用素のレゾルベントに対する下側評価について
3. 学会等名 日本数学会2017年年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 An alternative approach of invertibility verifications for linear operators in Hilbert spaces
3. 学会等名 The International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2017 (INVA 2017) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshitaka Watanabe, Takehiko Kinoshita, and Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 Validated constructive error estimations for bi-harmonic problems
3. 学会等名 17th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2016) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 重調和方程式の近似解に対する構成的誤差評価
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 Legendre多項式による重調和方程式の精度保証付き誤差評価
3. 学会等名 日本応用数理学会2016年度年会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yoshitaka Watanabe
2. 発表標題 A nonlinear PDE verification -- Fukuoka, Karlsruhe
3. 学会等名 Nonlinear PDE Days (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, and Mitsuhiro T. Nakao
2. 発表標題 H3 and H4 regularities of the Poisson equation on polygonal domains
3. 学会等名 Sixth International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏
2. 発表標題 精度保証付き数値計算による平行Poiseuille流れの高精度不安定性解析
3. 学会等名 日本数学会2016年度年会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 渡部 善隆
2. 発表標題 Kolmogorov問題の精度保証付き数値計算に対するいくつかの考察
3. 学会等名 日本数学会2015年度秋季総合分科会
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 渡部 善隆, Kaori Nagatou, Michael Plum, 中尾 充宏
2. 発表標題 線形化Kolmogorov問題に対する固有値の除外について
3. 学会等名 日本応用数理学会2015年度年会
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yoshitaka Watanabe's home page <a href="http://ri2t.kyushu-u.ac.jp/~watanabe/">http://ri2t.kyushu-u.ac.jp/~watanabe/</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	木下 武彦  (Takehiko Kinoshita)  (30546429)	京都大学・健康長寿社会の総合医療開発ユニット・特定講師    (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	カールスルーエ工科大学			
ドイツ	カールスルーエ工科大学			
ドイツ	カールスルーエ工科大学			
ドイツ	カールスルーエ工科大学			